UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT DE LA SORBONNE

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion

2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : Indépendances et probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles continues

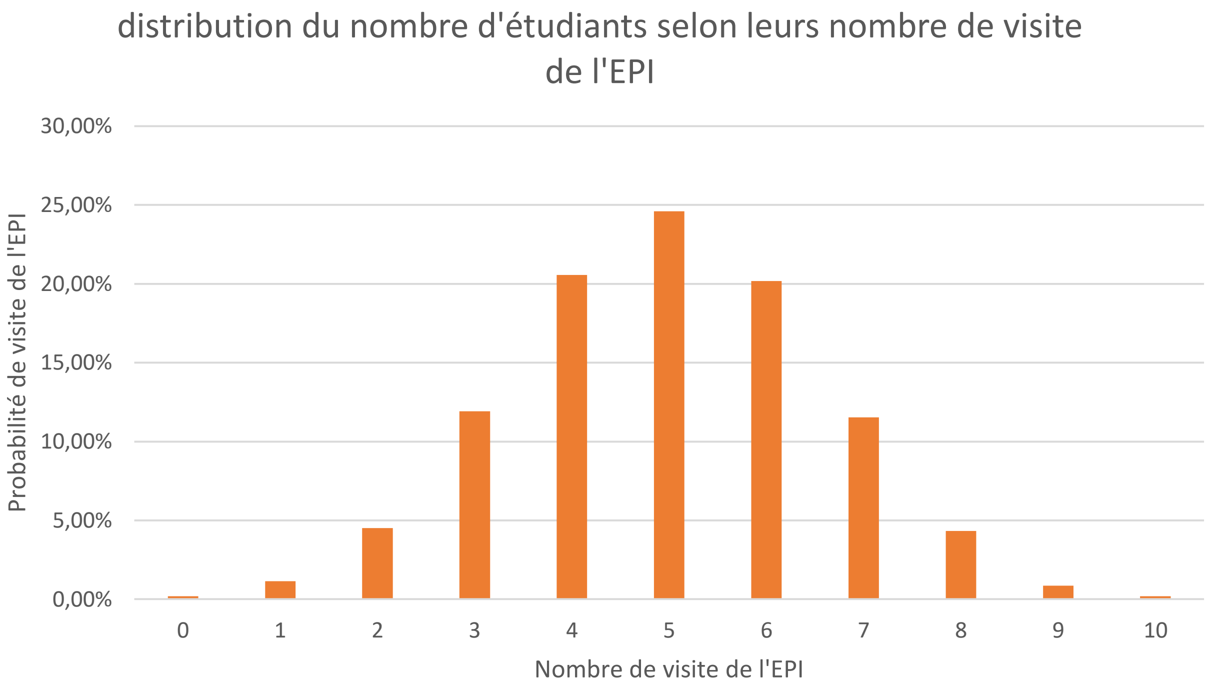
4. La loi normale
5. La loi normale centrée et réduite

4. La loi normale

Introduction

Exemple : la fréquentation de l'EPI par les étudiants

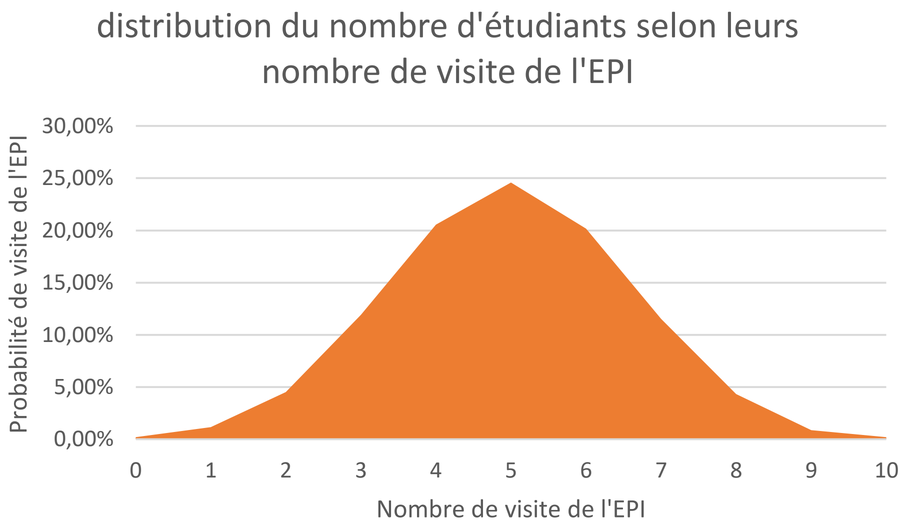
Nombre de visite de l'EPI	Nombre d'étudiant	Fréquence
0	2	0,19%
1	12	1,15%
2	47	4,51%
3	124	11,91%
4	214	20,56%
5	256	24,59%
6	210	20,17%
7	120	11,53%
8	45	4,32%
9	9	0,86%
10	2	0,19%
Total	1041	100,00%



1. La loi normale

Introduction

Nombre de visite de l'EPI	Nombre d'étudiant	Fréquence
0	2	0,19%
1	12	1,15%
2	47	4,51%
3	124	11,91%
4	214	20,56%
5	256	24,59%
6	210	20,17%
7	120	11,53%
8	45	4,32%
9	9	0,86%
10	2	0,19%
Total	1041	100,00%

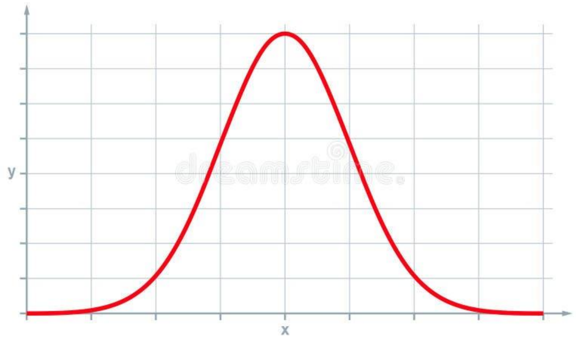


Aire totale de la fonction de densité de probabilité est égal à 1 (à 100%)

4. La loi normale

Introduction

- Au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente, l'histogramme devient de plus en plus régulier et se rapproche d'une courbe en cloche, appelée loi normale.

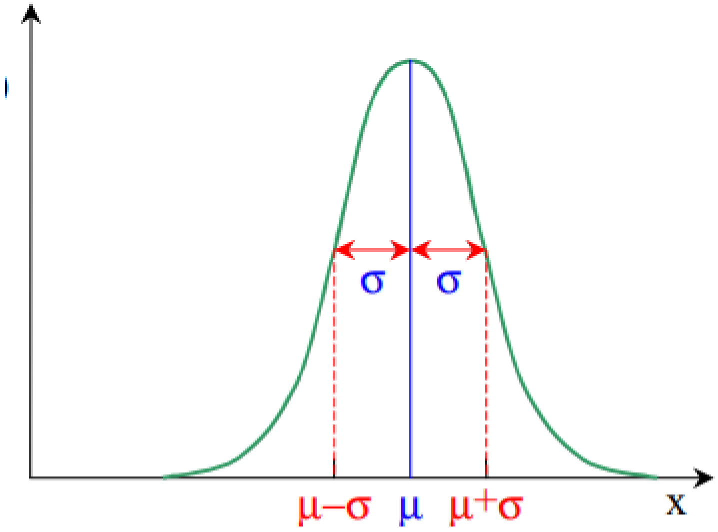


- La loi normale est une loi de probabilité continue qui permet de modéliser le plus grand nombre de phénomènes aléatoires (phénomènes possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s’additionnent, sans que l’un d’eux domine).

- La loi normale est la loi statistique la plus répandue et la plus utile. Elle représente beaucoup de phénomènes aléatoires.

4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale

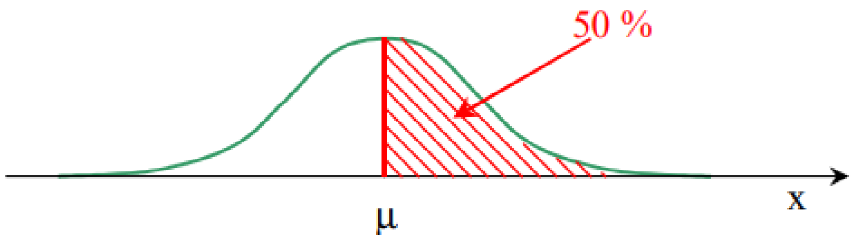


Caractéristiques de cette courbe :

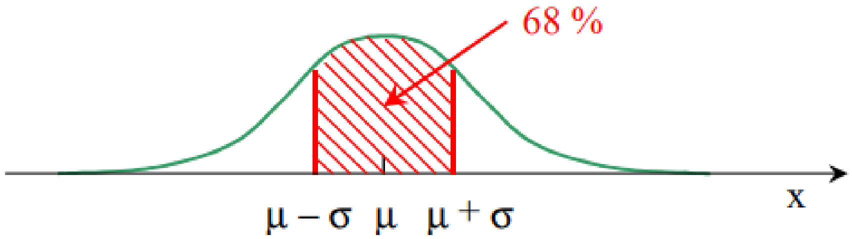
- Les valeurs se répartissent de façon régulière et symétrique autour de la moyenne.
- Elle se rapproche de 0 pour des valeurs très faibles ou très fortes
- La distribution est d'autant plus étalée que σ est grand.

4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale



68 % des individus entre μ–σ et μ+σ



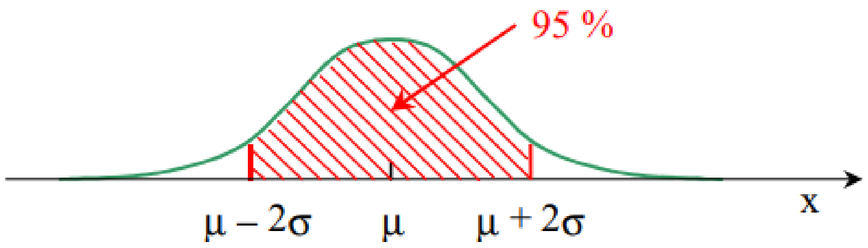
Lorsque la distribution des individus dans une population obéit à la loi normale, on trouve :

- 50 % des individus en-dessous de la moyenne μ et 50 % au-dessus (la loi normale est symétrique)

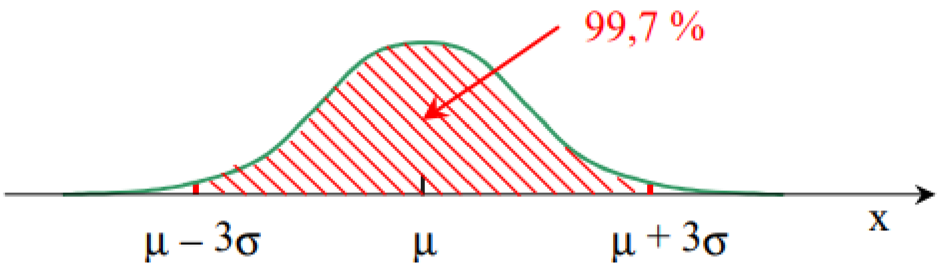
- 68 % des individus entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$

4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale



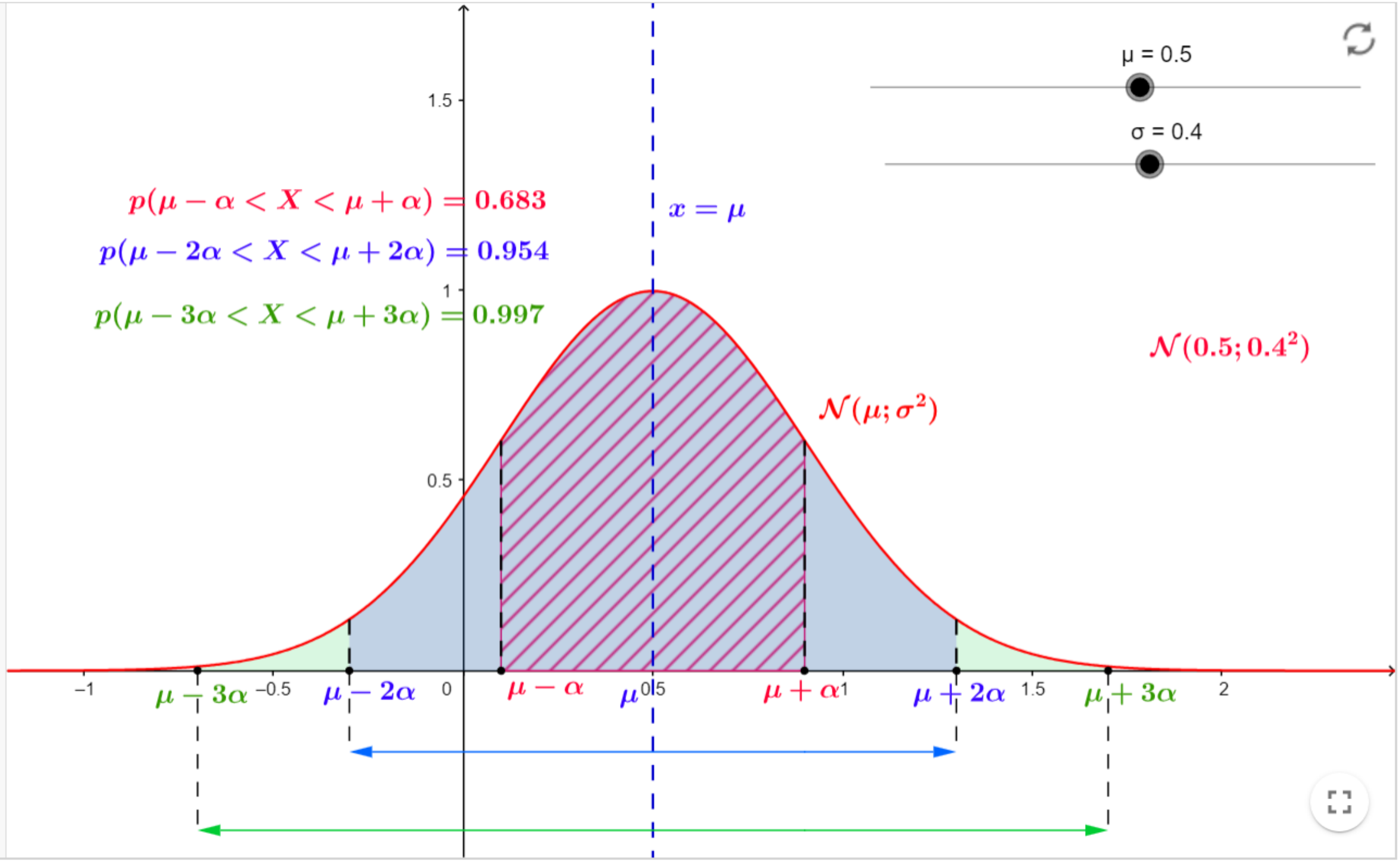
95 % des individus entre μ - 1,96σ et μ + 1,96σ, que nous arrondirons à l'intervalle [μ−2σ, μ+2σ]



99,7 % des individus entre μ − 3σ et μ + 3σ (il y a donc très peu de chances qu'un individu s'écarte de la moyenne de plus de 3σ)

4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale



4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale

Si une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 :

On note $X \to N(m ; \sigma^2)$

La fonction densité de probabilité de la variable réelle x est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Cette fonction est difficile à intégrer, d’où l’utilisation d’une autre méthode pour le calcul des probabilités.

On effectue en effet un changement de variable de façon à se ramener à une variable suivant une loi dite normale standard pour laquelle on dispose d’une table donnant les valeurs de la fonction de répartition

4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale

Si une variable aléatoire X suit une loi normale N *(m, σ^2)* alors son espérance vaut *m* et sa variance vaut σ^2

$$E(X) = m$$
$$\sigma(Y) = \sigma$$

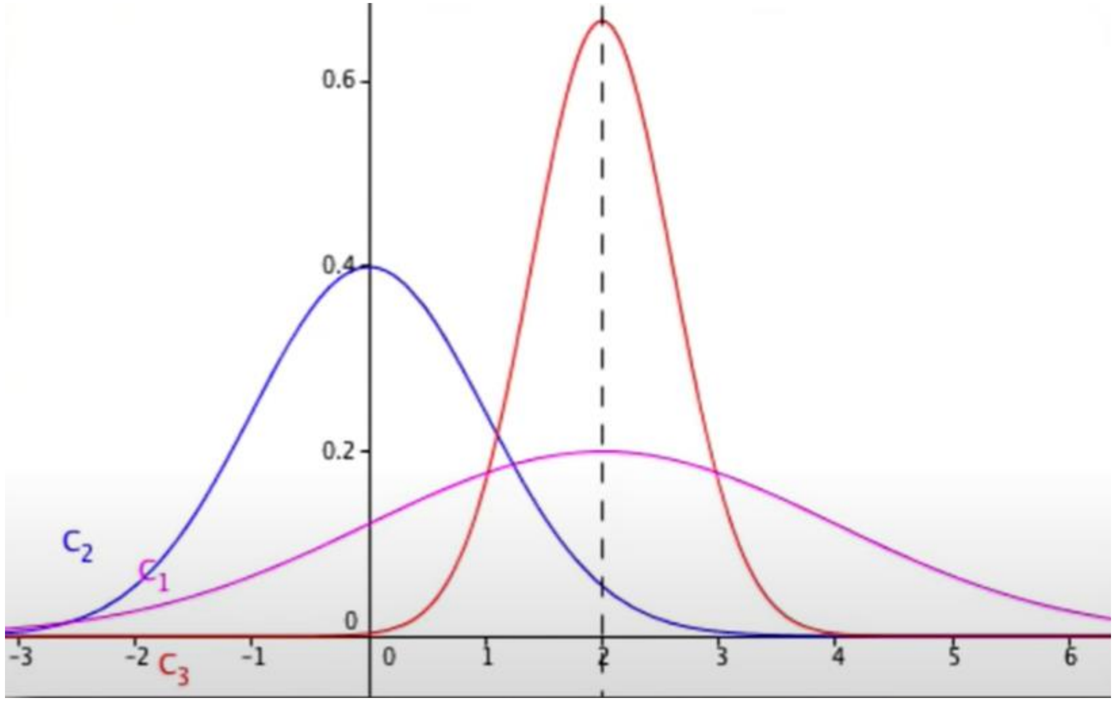
4. La loi normale

A. Définition et propriétés de la loi normale

Application :

Associez à chaque courbe de densité, la loin normale correspondante

$N(0\ ;\ 1^2), N(2\ ;\ 0{,}6^2), N(2\ ;\ 2^2)$



$C2 : N(0\ ;\ 1^2)$
C3 : $N(2\ ;\ 0{,}6^2)$
C1 : $N(2\ ;\ 2^2)$

5. La loi normale centrée et réduite

A. Définition et propriété de la loi normale

Pour calculer les probabilités associées à la loi normale, on utilise généralement la loi normale centrée et réduite : c'est une loi normale pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Il faut donc toujours effectuer une transformation (changement de variable) de la variable normale en normale centrée et réduite.

Ceci permet de connaître des probabilité rattachées à certaines valeurs de X à partir de la lecture d'une table unique correspondant à la variable Z. Cette table permet de calculer quel pourcentage de l'effectif total d'une distribution (plus exactement quelle probabilité) se situe avant une valeur Z donnée.

5. La loi normale centrée et réduite

A. Définition et propriété

Soit une variable X suivant une loi normale de paramètres m et σ^2, $X \rightarrow N(m; \sigma^2)$.

On considère le changement de variable :

$X \rightharpoonup \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $E(X) = m$ $Var(X) = \sigma^2$	$T = \frac{X-m}{\sigma}$	$T \rightharpoonup \mathcal{N}(0, 1)$ $E(T) = 0$ $Var(T) = 1$

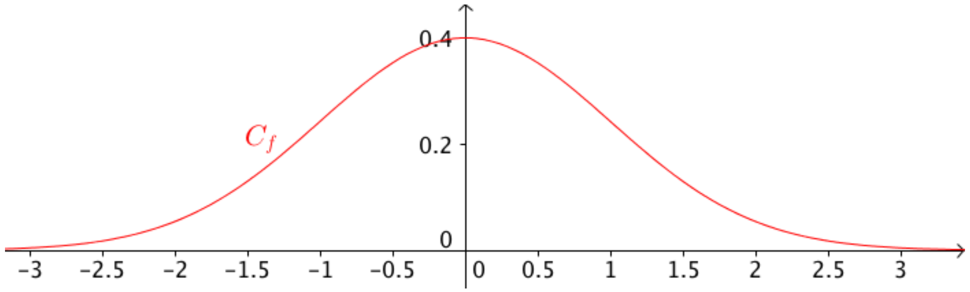
- La variable T est appelée variable normale centrée réduite.
- En effet, puisque X suit une loi normale, T, fonction affine de X suit également une loi normale de paramètres égaux à 0 et à 1

5. La loi normale centrée et réduite

A. Définition et propriété

La loi normale centrée réduite, notée $N(0\,;1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

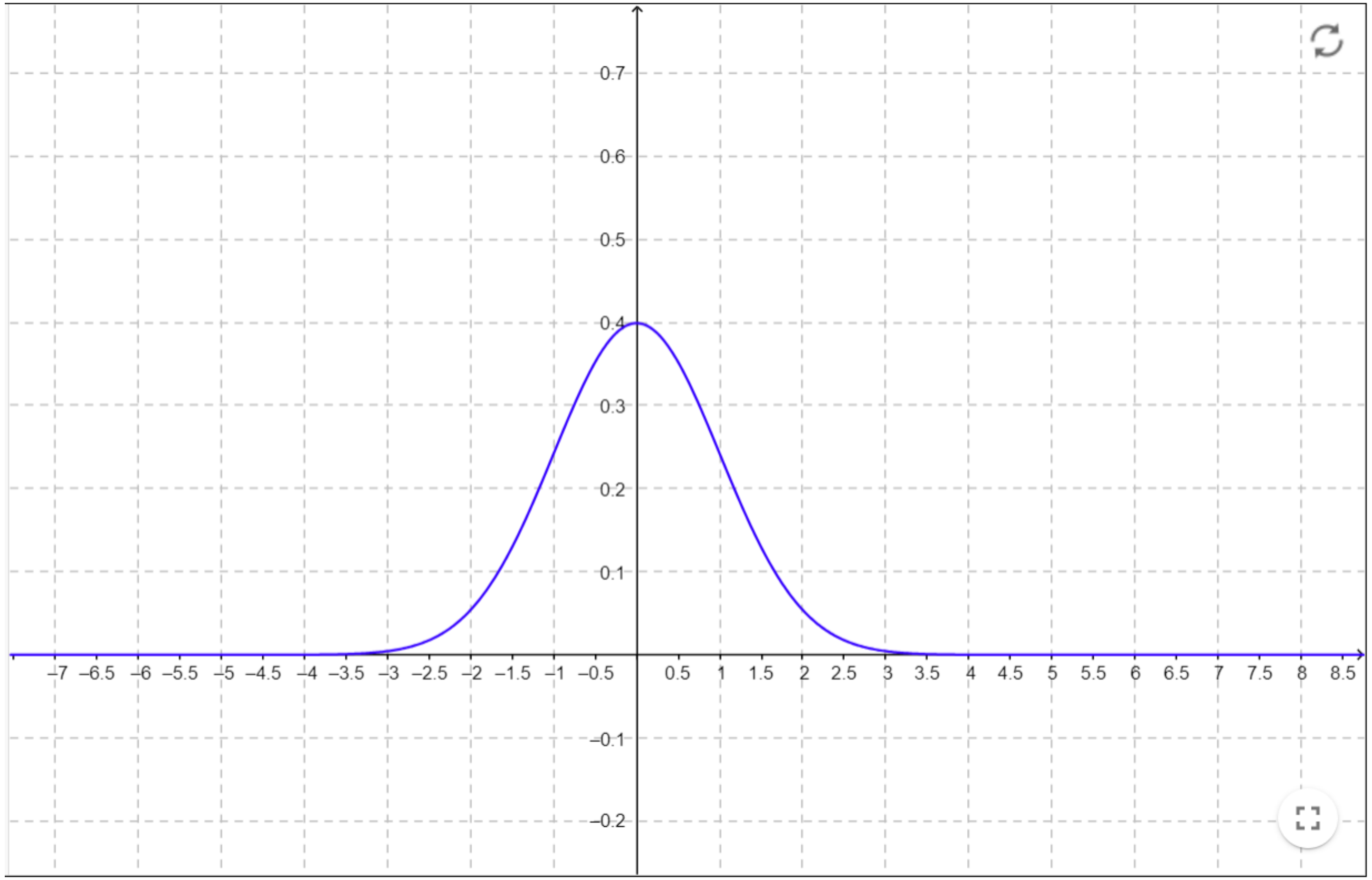
$P(X \geqslant 0) = 0{,}5$

$P(X \leqslant 0) = 0{,}5$

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$

$P(X \leqslant -a) = (X \geqslant a)$

$P(X \leqslant a) = 1 - P(X \geqslant a)$



5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

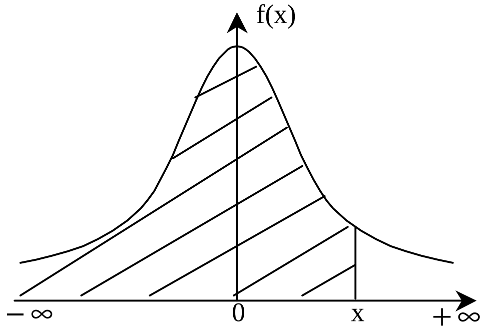
<u>Application</u>

Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N(0 ;1). On donne $P(Z \leqslant 1{,}2) \approx 0{,}885$.
Déterminer :

1) $P(Z \geqslant -1{,}2)$
2) $P(-1{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}2)$

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

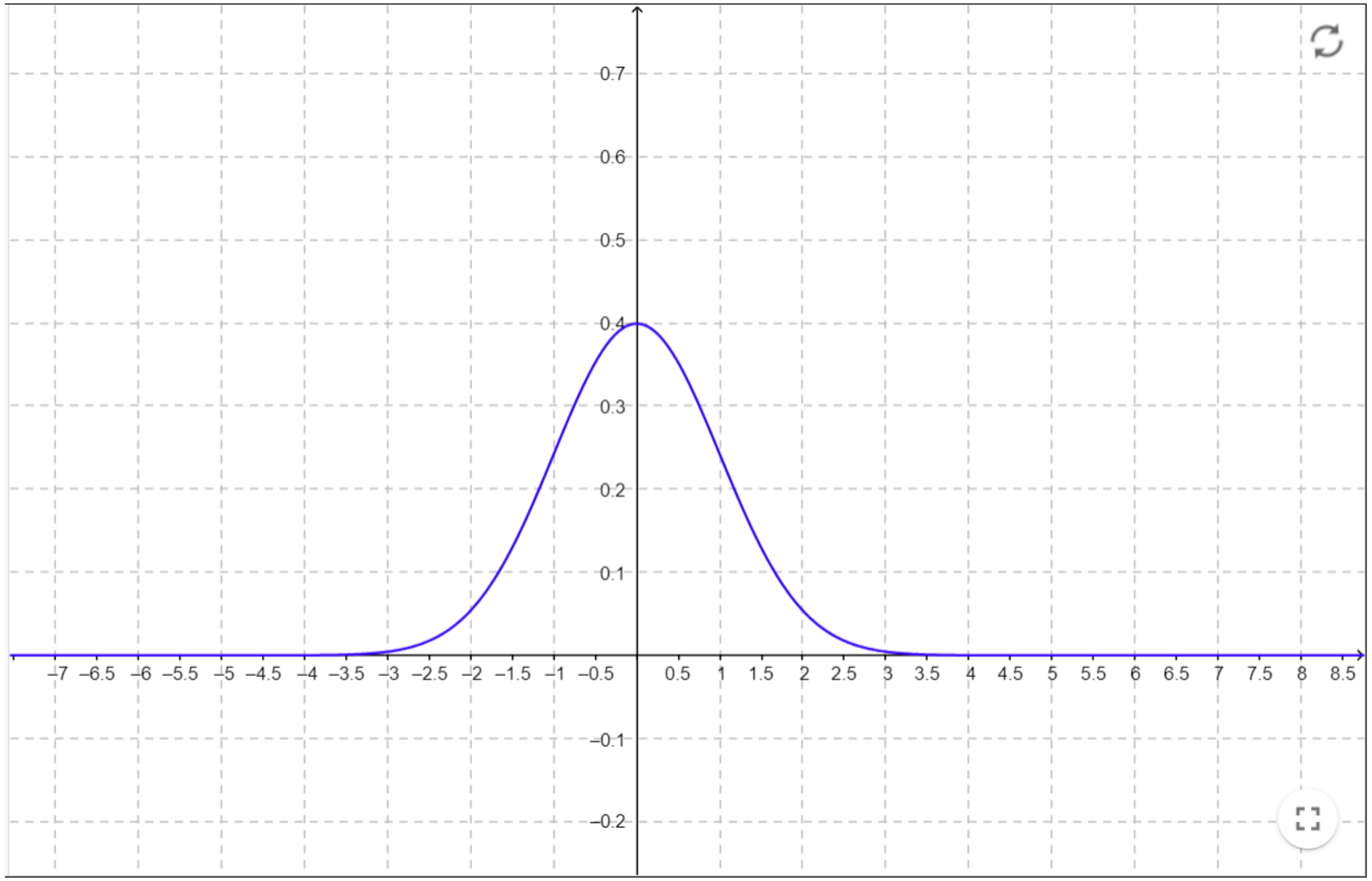
X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités



<u>Corrigé</u>

1) Calcul de $P(Z \geqslant -1,2)$

La loi normale centrée réduite est symétrique par rapport à sa moyenne, qui est zéro.

Cela implique que $P(Z \leqslant a) = P(Z \geqslant -a)$ pour toute valeur de a.

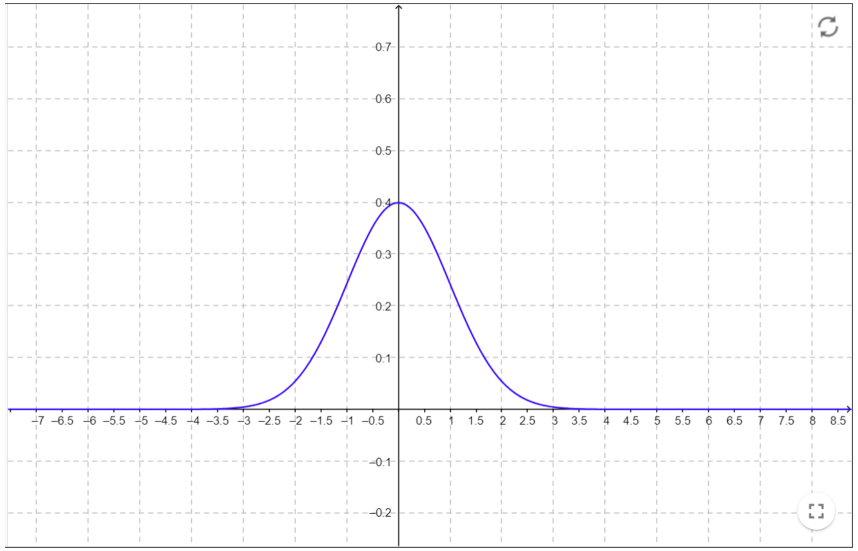
Ainsi, on a $P(Z \geqslant -1,2) = P(Z \leqslant 1,2) = 0,885$ en utilisant la propriété de symétrie.

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

<u>Corrigé</u>

2) Calcul de $P(-1,2 \leqslant Z \leqslant 1,2)$



Pour calculer cette probabilité, nous utilisons le fait que :

$P(a \leqslant Z \leqslant b) = P(Z \leqslant b) - P(Z \leqslant a)$.

Ici, $a = -1,2$ et $b = 1,2$

$P(-1,2 \leqslant Z \leqslant 1,2) = P(Z \leqslant 1,2) - P(Z \leqslant -1,2)$

Nous savons déjà que $P(Z \leqslant 1,2) = 0,885$

$P(Z \leqslant -1,2) = 1 - P(Z \geqslant -1,2)$. Nous avons déjà calculé $P(Z \geqslant -1,2) = 0,885$

$P(Z \leqslant -1,2) = 1 – 0,885 = 0,115$. Ainsi, $P(Z \leqslant -1,2) = 0,115$.

Finalement, la probabilité que Z soit entre -1,2 et 1,2 est : $P(-1,2 \leqslant Z \leqslant 1,2) = P(Z \leqslant 1,2) - P(Z \leqslant -1,2) = 0,885 – 0,115 = 0,77$.

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

Exercice

On suppose que le comportement des ventes mensuelles d'une entreprise peut être modélisé par une loi normale, de paramètres 2 000 et 145^2.

1. Rappeler la signification de ces paramètres.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

    a. Le nombre de ventes mensuel est inférieur à 2 300 unités.

    b. Le nombre de ventes mensuel est inférieur à 1900 unités.

    c. Le nombre de ventes mensuel est supérieur à 2170 unités

    d. Le nombre de ventes mensuel est compris entre 2100 et 2400 unités.

3. Calculer la probabilité de l'intervalle : moyenne ±1écart-type, c'est-à-dire la probabilité, dans notre cas, que les ventes soient comprises entre 2 000 – 145 et 2 000 + 145 unités.

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

Corrigé

Soit X le nombre de ventes mensuel. X est aléatoire. $X \rightarrow N\ (2\ 000\ ;\ 145^2)$

1) Signification des paramètres

Le premier paramètre de la loi normale est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, ventes mensuelles. En moyenne, le nombre mensuel de ventes est égal à 2 000. Le deuxième paramètre correspond à l'écart-type. Le fait que cette écart-type ne soit pas nul prouve que la variable « Nombre de ventes » est aléatoire, elle ne prend pas toujours la même valeur, mais elle fluctue autour de 2000 ventes, la valeur espérée moyenne. L'écart-type caractérise ces variations.

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

Corrigé

2) $X \to N(2\,000 \,;\, 145^2)$, il faut donc pour pouvoir probabiliser des événements portant sur le nombre de ventes, utiliser la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée, réduite.

Centrer et réduire la variable : $Z = \dfrac{X - 2\,000}{145} \quad \to N(0\,;\,1)$

$P(X < 2300) = P\left(\dfrac{X - 2\,000}{145} < \dfrac{2300 - 2\,000}{145}\right) = p(Z \leq 2{,}07)$ et $Z \to N(0\,;\,1)$

$p(Z \leq 2{,}07) = 0{,}9808$

On lit cette valeur à l'intersection de la ligne Z = 2,0 et de la colonne Z = 0,07.

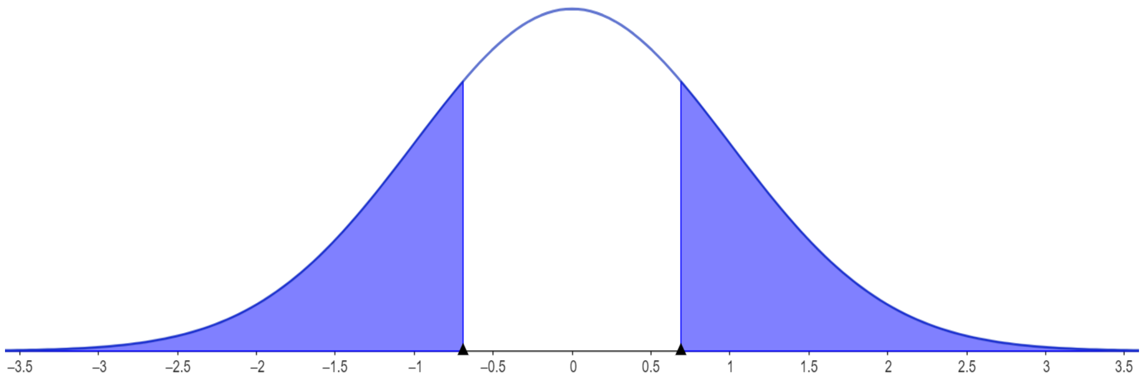
Ainsi, la probabilité que le nombre de ventes reste inférieur à 2300 unités est égale à 98,08 %.

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

<u>Corrigé</u>

$P(X < 1900) = \mathrm{P}\left(\frac{X - 2\,000}{145} < \frac{1900 - 2\,000}{145}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -0{,}69)$ et $Z \rightarrow N\,(0\,;\,1)$



$\mathrm{P}(Z \leq -0{,}69) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 0{,}69) = 1 - 0{,}7549 = 0{,}2451$

On lit la valeur à l'intersection de la ligne Z = 0,6 et de la colonne Z = 0,09.

Ainsi, la probabilité que le nombre de ventes mensuel

reste inférieur à 1 900 unités est égale à 24,51 %.

Il y a 24,51 % de chances que le nombre de ventes reste inférieur à 1 900 unités.

$P(X > 2170) = \mathrm{P}\left(\frac{X - 2\,000}{145} > \frac{2170 - 2\,000}{145}\right) = \mathrm{P}(Z > 1{,}17) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 1{,}17) = 1 - 0{,}8795 = 0{,}1205$

Dans 12 % des cas, le nombre de ventes dépasse 2 150

5. La loi normale centrée et réduite

B. Calcul de probabilités

<u>Corrigé</u>

$P(2100 < X < 2400) = P\left(\frac{2100 - 2\,000}{145} < \frac{X - 2\,000}{145} < \frac{2400 - 2\,000}{145}\right) = P(0{,}69 < Z < 2{,}76)$ et $Z \rightarrow N\ (0\ ;\ 1)$

$= P(Z < 2{,}76) - P(Z < 0{,}69) = 0{,}9971 - 0{,}7549 = 0{,}2422$

3. Probabilité de l'intervalle : moyenne ± 1 écart-type :

$P(2000 - 145 < X < 2000 + 145) = P(1855 < X < 2145) = P\left(\frac{1855 - 2\,000}{145} < \frac{X - 2\,000}{145} < \frac{2145 - 2\,000}{145}\right)$

Nous cherchons $P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$

$P(Z < 1) - P(Z < -1) = p\ (Z < 1) - (1 - p\ (Z < 1)) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

Il y a donc 68,3 % de chances que le nombre de ventes soit dans cet intervalle (compris entre 1 855 et 2 145ventes). On peut remarquer que cela ne dépend ni de la valeur prise par la moyenne, ni de celle prise par l'écart-type de la variable

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

- La loi binomiale de paramètres n et p peut, sous certaines conditions sur ses paramètres, être approchée par une loi normale.

Si
$$\begin{cases} X \to B\,(n\,;\,p) \\ n \geqslant 30 \\ n \times p > 5 \\ n \times (1-p) > 5 \end{cases}$$

Alors X → N (np ; $\sqrt{np(1-p)}$).

Ainsi X → N (np ; $\sqrt{np(1-p)}$)

La correction de continuité

Les variables binomiale est une variables discrète, prenant des valeurs entières : {0 ; 1 ; 2 ; …; n} dont le spectre est discontinu alors que la loi normale est une loi continue. Il convient donc d'effectuer une correction appelée correction de continuité, pour que l'approximation soit meilleure, lorsqu'on souhaite utiliser l'approximation d'une loi discrète par une loi continue de probabilité. Cette correction consiste à remplacer la valeur de x, entière, par l'intervalle $\left[X - 0{,}5\,;\,X + 0{,}5\right]$

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Exercice

On lance 300 fois un dé tétraèdrique (à 4 faces) non truqué. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de 4 obtenus.

1) Justifier que X suit une loi binomiale puis préciser ses paramètres.

2) Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale centrée réduite.

3) A l'aide d'une approximation par une loi normale centrée réduite, déterminer au centième $P(X= 60)$; $P(X \leq 70)$

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Corrigé

1) Justifier que X suit une loi binomiale puis préciser ses paramètres.

On lance un dé tétraédrique (à 4 faces) non truqué 300 fois. La variable aléatoire X comptant le nombre de fois où le résultat est un 4 peut être modélisée par une loi binomiale pour les raisons suivantes :

- Chaque lancer du dé est une épreuve de Bernoulli car il y a seulement deux issues possibles : obtenir un 4 (succès) ou ne pas obtenir un 4 (échec).

- La probabilité d'obtenir un 4 à chaque lancer est $\frac{1}{4}$ car le dé est équilibré et non truqué.
- Les lancers sont indépendants les uns des autres, l'issue d'un lancer n'influençant pas celle des autres.

Ainsi, X suit une loi binomiale (B(n, p) et plus précisément B(300, $\frac{1}{4}$)

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Corrigé

2) Cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale centrée réduite car :

$$\begin{cases} X \rightarrow B\left(300\ ;\ \frac{1}{4}\right) \\ n \geqslant 30 \\ n \times p = 300 \times \frac{1}{4} = 75 > 5 \\ n \times (1-p) = 300 \times \frac{3}{4} = 225 > 5 \end{cases}$$

Ces valeurs suggèrent qu'une approximation normale est raisonnable. La loi normale qui approxime X est

$X \rightarrow N\left(np\ ;\ \left(\sqrt{np(1-p)}\right)^2\right)$. C'est-à-dire $X \rightarrow N\left(75\ ;\ 7{,}5^2\right)$

Elle peut être aussi approximé par une loi normale centrée et réduire Z tel que $Z = \frac{X - E(x)}{\sigma(X)}$ C'est-à-dire $Z \rightarrow N(0\ ;\ 1)$

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Corrigé

3) A l'aide d'une approximation par une loi normale centrée réduite, déterminer au centième P(X= 60) ; P(X≤70)

E(X) = np = 300 x $\frac{1}{4}$ = 75 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ = 7,5

Pour calculer *P*(*X* =60) avec l'approximation normale en intégrant la correction de continuité, nous traitons *X*= 60 comme l'intervalle [59,5 ; 60,5]. Cela revient ainsi à calculer : *P*(59,5 ≤ *X* ≤ 60,5) = P(X ≤ 60,5) – P(X ≤ 59,5)

Pour trouver P (X ≤ 60,5) en utilisant l'approximation normale centrée réduite, on standardise cette valeur

$P(\frac{X-75}{7,5} \leq \frac{60,5-75}{7,5}) = P(Z \leq -1,93)$ et Z → N (0 ; 1)

$P(Z \leq -1,93) = 1 - P(Z \leq 1,93) \approx 0,0268$

$P(X \leq 59,5) = P(\frac{X-75}{7,5} \leq \frac{59,5-75}{7,5}) = P(Z \leq -2,06)$ et Z → N (0 ; 1)

$P(Z \leq -2,06) = 1 - P(Z \leq 2,06) \approx 0,0194$

P(*X* =60) = : *P*(59,5 ≤ *X*≤ 60,5) = P(X ≤ 60,5) – P(X≤ 59,5) = 0,0266−0,0194≈0,0072.

La probabilité que *X* soit exactement 60 en utilisant cette approximation normale avec correction de continuité est d'environ 0.0072, soit 0.72%

5. La loi normale centrée et réduite

C. Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Corrigé

Pour calculer $P(X \leq 70)$, on doit effectuer la correction de continuité pour pouvoir utiliser la loi normale : $P(X \leq 70) \approx P(X \leq 70{,}5)$

Pour trouver $P(X \leq 70{,}5)$ en utilisant l'approximation normale centrée réduite, on standardise cette valeur

$$P\left(\frac{X-75}{7{,}5} \leq \frac{70{,}5-75}{7{,}5}\right) = P(Z \leq -0{,}6) \quad \text{et } Z \rightarrow N\,(0\,;1)$$

$P(Z \leq -0{,}6) = 1 - P(Z \leq 0{,}6) \approx 0{,}2743$

Donc $P(X \leq 70) \approx 0{,}2743$ au centième près. Cette probabilité nous indique que la chance d'obtenir 70 fois ou moins le chiffre 4 en 300 lancers est d'environ 27,43%.

5. La loi normale centrée et réduite

D. Approximation de la loi Poisson par une loi normale

Une variable aléatoire X discrète suit une loi de Poisson, de paramètre λ si sa loi de probabilité est modélisée par la fonction suivante :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^k}{k\,!}$$

- La loi Poisson de paramètres λ peut, sous certaines conditions sur son paramètre, être approchée par une loi normale.

Si $\begin{cases} X \to P\,(\lambda) \\ \lambda \geqslant 15 \end{cases}$ Alors $X \to N\,(\lambda\,;\sqrt{\lambda}\;^2)$

La loi de Poisson de paramètre λ peut donc, lorsque son paramètre est grand, être approchée par une loi normale de paramètres λ *et* $\sqrt{\lambda}\;^2$

5. La loi normale centrée et réduite

D. Approximation de la loi Poisson par une loi normale

Exercice

Une boutique en ligne reçoit en moyenne 50 commandes par jour. Supposons que le nombre de commandes par jour suit une distribution de Poisson. On vous demande de calculer la probabilité que la boutique reçoive entre 45 et 55 commandes incluses, en un jour donné, en utilisant l'approximation de la loi normale avec la correction de continuité.

5. La loi normale centrée et réduite

D. Approximation de la loi Poisson par une loi normale

Corrigé

- Vérification des conditions d'approximation :

Le nombre de commandes X suit une distribution de Poisson avec un paramètre λ=50. Pour de grandes valeurs de λ, la distribution de Poisson peut être approximée par une distribution normale avec les paramètres μ=λ et σ^2=λ. Ici, λ=50 est suffisamment grand ($\lambda \geqslant$ 15) pour justifier cette approximation X→ N (λ ; $\sqrt{\lambda}^2$). C'est-à-dire X→ N (50 ; $7{,}07^2$)

5. La loi normale centrée et réduite

D. Approximation de la loi Poisson par une loi normale

<u>Corrigé</u>

Pour calculer $P(45 \leq X \leq 55)$ avec correction de continuité, nous ajustons les bornes pour X en tant que variable continue :

$P(45 \leq X \leq 55) \approx P(44{,}5 \leq X \leq 55{,}5)$

$P(44{,}5 \leq X \leq 55{,}5) = \mathrm{P}\left(\frac{44{,}5 - 50}{7{,}07} \leq \frac{X - 50}{7{,}07} \leq \frac{55{,}5 - 50}{7{,}07}\right) = \mathrm{P}(-0{,}779 \leq Z \leq 0{,}779)$ et $Z \rightarrow N\,(0\,;1)$

$\mathrm{P}(-0{,}779 \leq Z \leq 0{,}779) = P(Z \leq 0{,}779) - P(Z \leq -0{,}779) = 0{,}7817 - 0{,}2183 \approx 0{,}5634$

Donc, il y a environ 56,34% de chance que la boutique reçoive entre 45 et 55 commandes en un jour, selon cette approximation avec correction de continuité