Année Universitaire 2015-2016
Université Paris I Panthéon-Sorbonne.
UFR 06-Gestion Sorbonne-EMS
L2 Gestion
Statistiques
Responsable de cours : M. SALVADORE - Maître de conférence

TD5 : Variable aléatoire discrète usuelles

Exercice 1 : (extrait sujet 2006) Dans une fête foraine, une tombola est organisée avec plusieurs carnets de jeu. Chaque carnet est composé de 10 billets parmi lesquels 3 sont gagnants et 7 sont perdants

1) Première situation : Une personne prend au hasard 3 billets dans le même carnet complet
   a) Calculer la probabilité pour que cette personne n'obtienne aucun billet gagnant
   b) Calculer la probabilité pour que cette personne obtienne un seul billet gagnant

2) Deuxième situation : On présente à une personne n carnets complets (où $n \in \mathbb{N}^*$).Cette personne choisit un billet dans chaque carnet. Ces n choix sont supposés indépendants les uns des autres et la probabilité de gagner est la même pour chaque carnet.
   a) Quelle est la probabilité p_n pour que cette personne ait au moins un billet gagnant ?
   b) Déterminer le plus petit entier k tel que $p_{k \geq 0,9}$

Exercice 2 : (extrait sujet 2003) On s'intéresse pendant la période des soldes au nombre X de clients qui se présente au magasin d'habillement chaque jour ouvrable. Cette variable est supposée suivre une loi de Poisson de paramètre λ. Tout client qui entre dans le magasin fait avec une probabilité égale à p ($0<p<1$), des achats pour un montant supérieur à 400 euros.
Le directeur du magasin souhaite déterminer la loi suivie par le nombre journalier de clients faisant au moins 400 euros d'achats.

1) Déterminer la loi de la variable conditionnelle $Y/X=x$, x étant une valeur entière postive ou nulle.
2) Calculer en fonction de x, y, λ et p, la valeur de : $P(X=x \text{ et } Y=y)$ en précisant les valeurs possibles de x et y.
3) Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.
   Application numérique : donner les valeurs de $P(Y>5)$ et $P(4\leq Y\leq 9)$ pour $\lambda=15$ et $p=0,1$

Exercice 3 : (extrait sujet 2014) Une banque a ouvert 400 000 comptes, on constate qu'un client sur quatre en moyenne ouvre un compte d'épargne dans l'année
On effectue un sondage en prélevant dans le fichier de la société 200 dossiers clients différents.
On effectue un sondage en prélevant dans le fichier de la société 200 dossiers clients différents.

1) Déterminer le nombre de possibilités d'obtenir un échantillon de taille 200.
2) Déterminer le nombre de clients ayant un compte épargne dans la population totale ? et en déduire le nombre de clients n'ayant pas de compte épargne.
3) Un échantillon de 200 clients est retenu. Soit X le nombre de client ayant un compte épargne parmi cet échantillon de 200 clients,
   a) Déterminer la loi de X et donner son expression
   b) Calculer l'espérance mathématique de X E(X) et la variance V(X)

4) Compte tenu de la taille de la population et celle de l'échantillon quelle est la loi de X ?
Quelle est l'espérance et la variance de cette loi ?

<u>Exercice 4</u> : On dispose d'un dé à 6 faces. On jette le dé six fois. Soit X la varaible aléaoire correspondant au nombre de 6 obtenu.
1°) Déterminer la loi X.
2°) Déterminer la fonction de répartition de X
3°) Calculer son espérance mathématique E(X)
4°) Calculer sa variance V(X)

<u>Exercice 5</u> : Un service vente de gros matériel informatique dispose d'équipes de dépannage qui intervient sur simple appel des clients. Pour diverses raisons les interventions peuvent intervenir parfois avec du retard. Il y a retard si l'intervention est faite plus de deux heures après l'appel du client. On admet que les appels sont indépendants les uns des autres et que pour chaque appel, la probabilité de retard est de 0,25.

1) Quel est la variable aléatoire correspondant à l'appel d'un client ?
2) Un même client a appelé à huit dates différentes. On appelle X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de fois où ce client subit un retard.

a) Définir la loi de probabilité de X ? et donner son expression.
Quelle est l'espérance mathématique de X et la variance de X
a) Calculer la probabilité de chaque événement.
- Le client a subi au moins un retard
- Le client a subi moins de 4 retards
- Le client a subit moins de 4 retards sachant qu'il en a subi au moins 1.

3) On considère un ensemble de 8 clients différents
2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard lors de leur appel.
On contacte au hasard 4 clients (distinct deux à deux) parmi ces huit
On appelle M la variable aléatoire dont les nombres de clients mécontents parmi les quatre contactés
a) Définir la loi de la variable aléatoire M et donner son expression.
b) Quelle sont les valeurs que peut prendre M et calculer les probabilités correspondantes
Quelle est l'espérance de M.

<u>Exercice 6</u> : (extrait septembre 2008) Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir 4 portes d'apparence identique, dont l'une est dite "bonne" et les 3 autres sont dites "mauvaises". Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1/ Le rat n'a aucune mémoire : il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre les 4 portes. Déterminer la loi de la v.a.r. X, nombre d'essais effectués par le rat, et donner son expression. Calculer E(X).

2/ Le rat a une mémoire parfaite : à chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées. Déterminer la loi de la v.a.r. Y, nombre d'essais effectués par le rat. Calculer E(Y) et V(Y).

EXERCICE 1.

G : billet gagnant / P : billet perdant.

1) a) $P(0G) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{\frac{7!}{3!.4!}}{\frac{10!}{3!.7!}} = \frac{\frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{3!}\times\cancel{4!}}}{\frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{3!\times\cancel{7!}}} = \frac{35}{\frac{10\times\cancel{9}^3\times\cancel{8}^4}{\cancel{3}\times\cancel{2}}} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$.

b) 1 billet gagnant = 1 billet gagnant et 2 billets perdants.

$P(1G \cap 2P) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{3\times\frac{7!}{2!5!}}{120} = \frac{3\times21}{120} = \frac{21}{40}$.

2) n carnets (avec 3 billets gagnants et 7 perdants) → 1 billet choisi dans chaque carnet

a) $X \rightsquigarrow B(n, \frac{3}{10})$.

$P(X=k) = C_n^k \times \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots n\}$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_n^0 \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

b) $P_k \geqslant 0,9 \iff 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^k \geqslant 0,9$

$\iff 0,1 \geqslant \left(\frac{7}{10}\right)^k$

$\iff \ln\left(\frac{1}{10}\right) \geqslant \ln\left(\frac{7}{10}\right)^k \iff \ln\left(\frac{1}{10}\right) \geqslant k \times \ln\left(\frac{7}{10}\right)$.

$\iff \frac{\ln(1/10)}{\ln(7/10)} \leq k \quad (\text{car } \ln\frac{7}{10} < 0)$

$\iff \frac{\ln 1 - \ln 10}{\ln 7 - \ln 10} \leq k$.

$\iff \frac{\ln 10}{\ln 10 - \ln 7} \leq k$.

or $\frac{\ln 10}{\ln 10 - \ln 7} \simeq 6,45 \ldots$ donc $\underline{k = 6.}$

EXERCICE 2.

1°) On note A l'évènement "Le client fait au moins 400 € d'achats".
A chaque client on peut associer une variable de Bernoulli définie par : $Z = 1$ si A est réalisé, 0 sinon.

On pose $p = p(Z=1)$. On designe par X le nombre de clients se présentant au magasin au cours d'une journée.

Si $X = x$, $(x \in \mathbb{N})$ alors le nombre de clients parmi x ayant fait au moins 400 € d'achats est donné par :

$\sum_{i=1}^{x} Z_i$ où les variables Z_i sont 2 à 2 indépendants et de même loi que Z définie ci-dessus.

Il est clair que $Y/_{X=x} = \sum_{i=1}^{x} Z_i$ suit une loi binomiale

$$Y/_{X=x} \leadsto B(x, p).$$

$$P(Y=y / X=x) = C_x^y \, p^y \times (1-p)^{x-y}$$

et si $y \in \mathbb{N}$ avec $y > x$ on a $p(Y=y/X=x) = 0$.

2°) Par définition, on a :

$$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y / X=x).$$

or $P(X=x) = e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^x}{x!}$

donc $P(X=x \cap Y=y) = C_x^y \times p^y \times (1-p)^{x-y} \times e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^x}{x!}$

et en simplifiant $C_x^y = \dfrac{x!}{y!\,(x-y)!}$, on a :

$$P(X=x \cap Y=y) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{p^y}{y!} \cdot \dfrac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \cdot \lambda^x & \text{si } y \leq x. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3°) <u>QUESTION FACULTATIVE</u>

Les évènements $\{(X=x), x \in \mathbb{N}\}$ représentent un système complet 2 à 2 incompatibles et leur reunion est certaine c'est-à-dire :

$$\sum_{x \in \mathbb{N}} P(X=x) = P\Big(\bigcup_{x \in \mathbb{N}} (X=x)\Big) = 1.$$

alors on a : $P(X=y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} P(Y=y \cap X=x)$

3

En remarquant que $\lambda^x = \lambda^y \times \lambda^{x-y}$ et en se rappellant que $P(Y=y / X=x) = 0$ si $y > x$ on a :

$$P(Y=y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \cdot \frac{p^y}{y!} \cdot \frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \cdot \lambda^y \cdot \lambda^{x-y}.$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} \cdot \frac{[(1-p).\lambda]^{x-y}}{(x-y)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} \cdot \sum_{x \geq y} \frac{[(1-p).\lambda]^{x-y}}{(x-y)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{[(1-p).\lambda]^k}{k!}$$

En posant $k = x-y$.

or $\sum_{k \geq 0} \frac{[(1-p).\lambda]^k}{k!} = e^{(1-p).\lambda}$.

On a alors $P(Y=y) = e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} \cdot e^{(1-p).\lambda}$

$$= e^{-\lambda + \lambda - \lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!} \quad ; y \geq 0.$$

Autrement dit, Y suit une loi de Poisson de paramètre λp

$\lambda = 15$ et $p = 0,1$. $\Rightarrow \lambda p = 1,5$.

Par lecture dans la table, on a :

$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - 0,9955 = 0,0045$

$$P(4 \leq Y \leq 9) = P(Y \leq 9) - P(Y < 4)$$

$$= P(Y \leq 9) - P(Y \leq 3).$$

$$= 1 - 0,9344$$

$$= 0,0656.$$

EXERCICE 3

1) Nombre de possibilités : C_{400000}^{200}

2) Le nombre de client ayant un compte épargne : $400000 \times \frac{1}{4} = 100000$

Le nombre de client n'ayant pas un compte épargne : $400000 \times \frac{3}{4} = 300000$.

3) a) $X \rightsquigarrow H(N, n, p)$.

avec $N = 400000$, $n = 200$, $p = \frac{1}{4}$.

$X \rightsquigarrow H(400000, 200, \frac{1}{4})$.

$$P(X=k) = \frac{C_{100000}^{200} \times C_{300000}^{200-k}}{C_{400000}^{200}}$$

b) $E(X) = n \times p = 200 \times \frac{1}{4} = 50$.

$V(X) = n \times p \times q \times \frac{N-n}{N-1} = 200 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{400000-200}{400000-1} = \frac{150}{4} \times \frac{399800}{399999} = 37{,}48$

4) • $\frac{n}{N} = \frac{200}{400000} = \frac{1}{20000} < \frac{1}{10}$.

donc $H(N, n, p) \underline{\sim} B(n, p)$ où $n = 200$ et $p = \frac{1}{4}$.

$H(400000, 200, \frac{1}{4}) \rightsquigarrow B(200, \frac{1}{4})$.

• $E(\tilde{X}) = np = 200 \times \frac{1}{4} = 50$.

$V(\tilde{X}) = n.p.q = 200 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 37{,}5$.

EXERCICE 4.

1°) $X \rightsquigarrow B(n=6, p=\frac{1}{6})$. $P(X=k) = C_n^k . p^k . q^{n-k} = C_6^k . (\frac{1}{6})^k . (\frac{5}{6})^{6-k}$.

2°) $F(x) = P(X < x)$.

si $x \in]-\infty; 0]$: $F(x) = 0$.

si $x \in]0; 1]$: $F(x) = P(X < x) = P(X=0) = (\frac{5}{6})^6$.

si $x \in]1; 2]$: $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = (\frac{5}{6})^6 + (\frac{5}{6})^5 (\frac{1}{6})$

⋮

si $x \in]6; +\infty[$: $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=6) = 1$.

3°) $E(X) = n.p = 1$

4°) $V(X) = n.p.q = \frac{5}{6}$.

EXERCICE 5.

TD5 / 5

1°) X suit une loi de Bernoulli : 1 = succès = retard
0 = échec = non retard.

$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(0{,}25)$.

2°)a) On répète 8 fois une épreuve de Bernoulli (8 appels).
Les épreuves sont indépendantes
et X correspond au nombre de fois où le client subit un retard

$\Rightarrow X \rightsquigarrow \mathcal{B}(8\,;\,0{,}25)$.

$\Rightarrow P(X=k) = C_8^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{8-k}$

$\Rightarrow E(X) = n \times p = 8 \times 0{,}25 = 2$.

$\Rightarrow V(X) = n \times p \times q = 2 \times 0{,}75 = 1{,}5$.

b) • $p(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_8^0 \cdot (0{,}25)^0 \cdot (0{,}75)^8 = 1 - (0{,}75)^8 \simeq 0{,}9$.

• $P(X<4) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$
$= (0{,}75)^8 + C_8^1 (0{,}25) \cdot (0{,}75)^7 + C_8^2 \cdot (0{,}25)^2 \cdot (0{,}75)^6 + C_8^3 \cdot (0{,}25)^3 \cdot (0{,}75)^5$
$\simeq 0{,}886$.

• $P_{(X \geq 1)}(X<4) = \dfrac{P(1 \leq X < 4)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{P(X<4) - P(X<1)}{P(X \geq 1)}$
$= \dfrac{0{,}886 - 0{,}1}{0{,}9} \simeq 0{,}873$.

3°) a) M suit une loi hypergéométrique : $M \rightsquigarrow \mathcal{H}(8, 4, \frac{1}{4})$.

b) • $M = \{0, 1, 2\}$.

$P(M=0) = \dfrac{C_2^0 \cdot C_6^4}{C_8^4} = \dfrac{1 \times \frac{6!}{4!2!}}{\frac{8!}{4!4!}} = \dfrac{3}{14}$.

$P(M=1) = \dfrac{C_2^1 \times C_6^3}{C_8^4} = \dfrac{2 \times \frac{6!}{3!3!}}{\frac{8!}{4!4!}} = \dfrac{4}{7}$.

$P(M=2) = \dfrac{C_2^2 \times C_6^2}{C_8^4} = \dfrac{1 \times \frac{6!}{4!2!}}{\frac{8!}{4!4!}} = \dfrac{3}{14}$.

• $E(M) = n \times p = 4 \times 0{,}25 = 1$.

EXERCICE 6

TDs 6

1) Rat sans mémoire.

X = nombre d'essais jusqu'à la bonne, y compris la bonne porte.

Il s'agit de la répétition d'expériences aléatoires identiques, une expérience de Bernoulli $B(p)$ où $p = \frac{1}{4}$.

- les expériences sont indépendantes (sans mémoire).
- X est le rang du 1^{er} succès.

$X \sim G(p)$ loi de Pascal avec $p = \frac{1}{4}$.

On a alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(X = k) = p \times q^{k-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{3^{k-1}}{4^k}$

$E(X) = \frac{1}{p} = 4.$

2) Le rat a une mémoire.

Y = nombre d'essais jusqu'à la bonne porte comprise.

$Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

On note A_i : "l'événement succès au $i^{\text{ème}}$ essai".

$P(Y=1) = P(A_1) = 1/4.$

$P(Y=2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \times P(A_2 / \overline{A_1}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = 1/4.$

$P(Y=3) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2} / \overline{A_1}) \times P(A_3 / \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 1/4$

$P(Y=4) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2} / \overline{A_1}) \times P(\overline{A_3} / \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times P(A_4 / \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}).$

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$

$E(Y) = \sum y \cdot P(Y=y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} - (2{,}5)^2.$

$= (1 + 4 + 9 + 16) \times \frac{1}{4} - 6{,}25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}.$