

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion
2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : Indépendances et probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 7 : Loi de probabilité

Chapitre 5. Variables aléatoires discrètes usuelles

5. Propriétés des variables aléatoires

6. La loi géométrique

7. La loi Poisson

5. Propriétés des variables aléatoires

A. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété : Soit une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour tout réel strictement positif δ , on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Ecart entre
X et sa moyenne

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$E(X) = 0,84$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ (Formule de König-Huygens)}$$

$$V(X) = \left[\left(\frac{21}{32}\right)^2 \times (-1) + \left(\frac{7}{32}\right)^2 \times 3 + \left(\frac{3}{32}\right)^2 \times 6 + \left(\frac{1}{32}\right)^2 \times 9\right] - 0,84^2$$

$$V(X) = 7,819$$

Exemple

Si $\delta = 20$ alors

$$\text{La probabilité que } P(|X - E(X)| \geq 20) \leq \frac{V(X)}{20^2}$$

$$\text{La probabilité que } P(|X - 0,84| \geq 20) \leq \frac{7,817}{20^2} = 0,020$$

$(X - 0,84) \geq 20 \text{ ----- } X \geq 20,84$
 $-(X - 0,84) \geq 20 \text{ ----- } X \leq -19,16$

La probabilité de gagner plus de 20,84 euros ou de perdre plus de 19,6 euros est inférieur à 2%

x_i	-1	3	6	9
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

5. Propriétés des variables aléatoires

A. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice

Vous êtes analyste financier dans une grande banque et vous étudiez le risque de défaut de paiement sur un portefeuille de prêts. Les données historiques indiquent que la probabilité de défaut sur un prêt individuel au cours d'une année donnée est de 2%. La banque a actuellement 1000 prêts actifs dans ce portefeuille.

- Utilisez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et les caractéristiques de la loi binomiale pour estimer la probabilité que le nombre de prêts en défaut de paiement soit supérieur à 30 ou inférieur à 10 dans une année donnée.

5. Propriétés des variables aléatoires

A. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Corrigé

Pour appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous devons d'abord calculer la moyenne $E(X)$ et la variance $V(x)$ de la distribution binomiale, qui représente le nombre de défauts de paiement attendu dans notre portefeuille de prêts.

$$E(X) = n.p = 1000 \times 0,02 = 20$$

$$V(x) = n.p.(1-p) = 1000 \times 0,02 \times 0,98 = 19,6$$

Avec ces valeurs, nous pouvons ensuite estimer la probabilité que le nombre de défauts s'écarte de la moyenne de plus que certaines valeurs spécifiques. Plus précisément, nous cherchons à calculer la probabilité que le nombre de défauts soit >30 ou <10 , ce qui revient à calculer la probabilité que le nombre de défauts s'écarte de la moyenne $E(X)$ de 10 défauts en moins ou de 10 défauts en plus

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} \qquad P(|X - 20| \geq 10) \leq \frac{19,6}{10^2} \qquad P(|X - 20| \geq 10) \leq 0,196$$

La probabilité que le nombre de prêts en défaut de paiement soit supérieur à 30 ou inférieur à 10 dans une année donnée est inférieur 19,6%

5. Propriétés des variables aléatoires

B. Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle d'espérance $E(X)$.

Pour tout réel strictement positif a , on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exemple :

- Une entreprise vend en moyenne 50 véhicules par semaine.

Soit X une variable aléatoire associée au nombre de véhicules vendues par semaine.

Calculer la probabilité que l'entreprise vend 100 ou plus par semaine.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \quad P(X \geq 100) \leq \frac{50}{100} \quad P(X \geq 100) \leq 0,5$$

- Si $P(X \geq 40) = 0,5$, alors $E(X) \geq 40 \times 0,5$ $E(X) \geq 20$

5. Propriétés des variables aléatoires

B. Inégalité de Markov

Exercice d'application

Vous êtes analyste de données dans une entreprise de e-commerce. Vous examinez le temps passé sur votre site web par les visiteurs. Vous savez que le temps moyen passé sur le site par visiteur est de 5 minutes. Vous souhaitez estimer la proportion de visiteurs qui passent plus de 15 minutes sur le site.

Utilisez l'inégalité de Markov pour estimer la probabilité qu'un visiteur passe plus de 15 minutes sur votre site web.

Corrigé

L'inégalité de Markov stipule que pour une variable aléatoire X non négative et une constante $a > 0$: $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

$E(X)$ = 5 minutes (temps moyen passé sur le site) ; a = 15 minutes (seuil d'intérêt).

$$P(X \geq 15) \leq \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

L'inégalité de Markov nous indique que la probabilité qu'un visiteur passe plus de 15 minutes sur le site est inférieure ou égale à 33,33% ou environ 33,33%. Cela signifie qu'au maximum, environ un tiers des visiteurs peuvent être attendus à passer plus de 15 minutes sur le site, selon l'estimation moyenne. Cette information peut être utile pour évaluer l'engagement des utilisateurs et la performance du contenu du site.

5. Propriétés des variables aléatoires

B. Inégalité de Markov

Exercice d'application

Vous travaillez comme analyste financier dans une banque d'investissement. Vous analysez le rendement annuel d'un portefeuille d'investissements diversifié. Sur les 10 dernières années, le rendement annuel moyen du portefeuille a été de 8%. Cependant, les investisseurs sont particulièrement préoccupés par les fluctuations négatives extrêmes, c'est-à-dire les années où le rendement est très faible ou même négatif. Pour cette raison, vous voulez estimer la probabilité que le rendement annuel du portefeuille soit inférieur à -10% dans une année donnée.

Peut-on utiliser l'inégalité de Markov pour estimer directement la probabilité que le rendement soit inférieur à -10%?

Corrigé

L'inégalité de Markov s'applique aux variables aléatoires non négatives et est utilisée pour estimer la probabilité qu'une variable aléatoire soit au moins aussi grande qu'une certaine valeur. Cependant, notre question porte sur la probabilité d'un rendement inférieur à -10%, qui est une valeur négative. Par conséquent, **nous ne pouvons pas utiliser directement l'inégalité de Markov** dans ce cas, car elle ne s'applique pas aux probabilités de valeurs inférieures à une certaine borne négative pour des variables qui peuvent prendre des valeurs négatives.

Une approche alternative pour estimer la probabilité de résultats extrêmes pour une variable qui peut prendre des valeurs négatives, comme le rendement annuel d'un investissement, est l'utilisation de **l'inégalité de Tchebyshev**

5. Propriétés des variables aléatoires

C. La fonction de répartition

Pour une variable aléatoire X , la fonction de répartition $F(x)$ est définie pour tout nombre réel x comme la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x tel que :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées

Caractéristiques de la fonction de répartition

- $0 \leq F(x) \leq 1$ pour tout x .
- $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$
- $F(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.
- $F(x)$ est une fonction croissante de x . Si $x_1 < x_2$, alors $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- si $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

5. Propriétés des variables aléatoires

Exemple

On considère l'évènement ω « lancer de 3 pièces ». On introduit une variable aléatoire X définie par $X(\omega)$:

« nombre de piles de l'évènement ω ».

La loi de probabilité de X est :

Nombre de piles	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
F_x	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

5. Propriétés des variables aléatoires

Exemple

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un **diagramme en bâtons** pour visualiser la distribution de probabilités et **une fonction escalier** pour la fonction de répartition

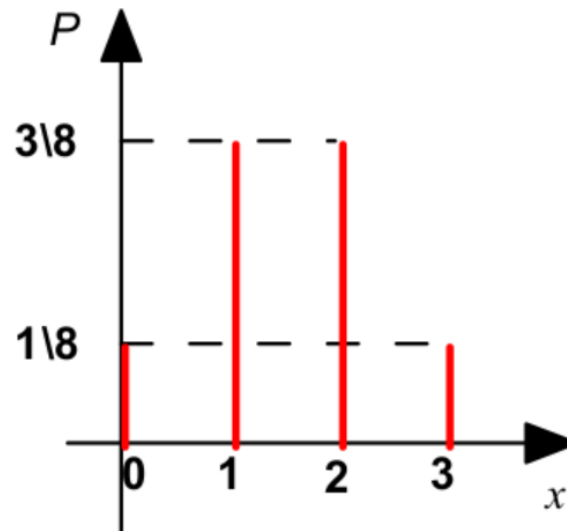


Diagramme en bâtons

5. Propriétés des variables aléatoires

Exemple

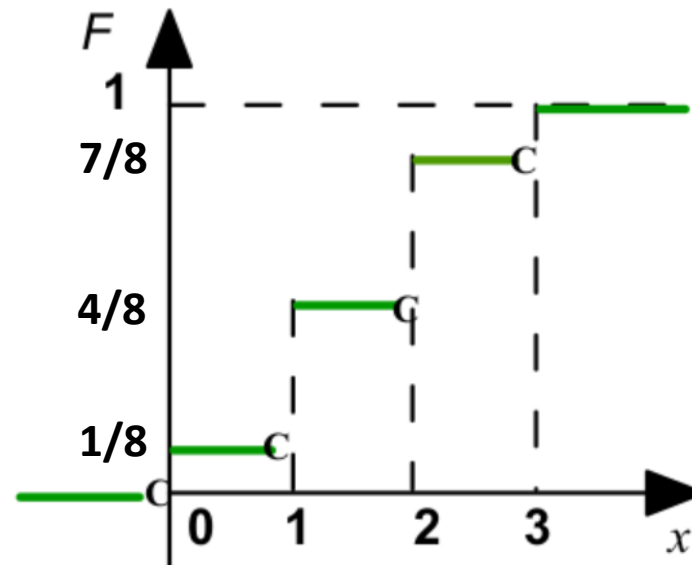
$$\forall x \in]-\infty; 0[, F_X(x) = 0$$

$$\forall x \in [0; 1[, F_X(x) = \frac{1}{8}$$

$$\forall x \in [1; 2[, F_X(x) = \frac{4}{8}$$

$$\forall x \in [2; 3[, F_X(x) = \frac{7}{8}$$

$$\forall x \in [3; +\infty[, F_X(x) = 1$$



Fonction de répartition

6. La loi géométrique

A. Définition

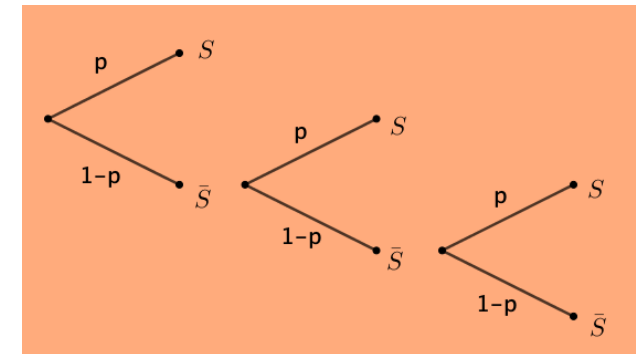
- L'expérience consiste à répéter des épreuves de Bernoulli indépendantes.
- La variable aléatoire X compte le nombre de fois où il faut répéter l'épreuve jusqu'à obtenir un premier succès c'est-à-dire la variable aléatoire X compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.
- On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .
- On construit un arbre de probabilité qui s'arrête à droite lorsque le succès est réalisé.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un succès après la k -ième expérience est :

$$P(X = k) = (1 - p) \times (1 - p) \times \cdots \times (1 - p) \times p \quad \text{avec } k - 1 \text{ facteurs } (1 - p)$$

- Sur l'arbre ci-dessus, on considère avoir obtenu un succès après la 3^e expérience.

$$\text{On a : } P(X = 3) = (1 - p) \times (1 - p) \times p$$



6. La loi géométrique

B. La loi de probabilité de la loi géométrique

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p .

Pour tout entier naturel k non nul, la loi de probabilité de X est

$$p \{ X = x \} = p \times (1 - p)^{x-1}$$

Exemple

- On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès qu'on obtient « pile », que l'on considère comme succès.
- La probabilité d'obtenir pour la première fois « pile » au troisième lancer est égale à : $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ où X est la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.

6. La loi géométrique

C. Les caractéristiques d'une variable géométrique

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p . On a :

$$\begin{aligned}\text{Si } X &\rightarrow \mathcal{G}(p), \text{ alors} \\ E(X) &= \frac{1}{p} \\ V(X) &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

Exemple

On dispose d'un stock de piles, dont certaines sont usagées et d'autres en état de fonctionnement ;

20 % des piles fonctionnent dans le stock.

On prélève avec remise une à une les piles pour les tester, jusqu'à en obtenir une en état de marche.

1. Quelle est la probabilité que la cinquième pile prélevée fonctionne ?
2. Combien faut-il compter en moyenne de tirages jusqu'à obtenir une pile en état de marche ?

6. La loi géométrique

Résolution

1) L'épreuve est une épreuve de Bernoulli puisqu'il n'y a que deux issues : la pile fonctionne (réalisation de E) ou la pile ne fonctionne pas. Les épreuves sont répétées, on est donc dans un processus de Bernoulli. Elles sont indépendantes, la probabilité qu'une pile fonctionne est constante et égale à 20 %

Si on suppose la taille du stock suffisamment grande pour être considérée infinie, le nombre X de tirages à effectuer pour obtenir un premier succès suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,2$

- $X \rightarrow \mathcal{G}(0,2) \Leftrightarrow p \{ X = x \} = (1 - 0,2)^{x-1} \times 0,2$
- La probabilité que la cinquième pile fonctionne est égale à $p \{ X = 5 \} = (1 - 0,2)^{5-1} \times 0,2 = 0,0819$.
- Dans 8,19 % des cas, c'est donc la 5^e pile prélevée qui fonctionne.

2) Le nombre moyen de tirages est égal à l'espérance mathématique de la variable X.

X suit une loi géométrique, de paramètre $p = 0,2$.

- L'espérance de la variable est égale à $E(X) = 1/P = 1/0,2 = 5$
- Il faut donc en moyenne prélever 5 piles avant d'obtenir une première pile qui fonctionne.

6. La loi géométrique

Exemple

Le « 5 » est un jeu qui se joue avec un dé. Dans la règle, il est écrit qu'on peut jouer continuellement en lançant le dé mais dès l'obtention d'un « 5 », le joueur n'a plus le droit de relancer le dé.

- Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires jusqu'à l'obtention d'un « 3 ».
- Calculer $P(X = 3)$ et $P(X \leq 8)$.

Résolution

X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. En effet, la probabilité d'un succès (obtenir un « 3 ») sur un lancer est égale à $\frac{1}{6}$.

- $P(X = 3) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{216} \approx 0,116.$
- $$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 8) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0,77 \end{aligned}$$

6. La loi géométrique

D. Exemples concrets d'utilisation de la loi géométrique en management

Ventes et marketing : Dans une campagne de marketing, une entreprise peut utiliser la loi géométrique pour estimer le nombre d'interactions nécessaires avec des clients potentiels avant qu'un achat ne soit effectué. Si chaque interaction avec un client a une petite chance de convertir, la loi géométrique aide à comprendre combien d'interactions sont généralement nécessaires pour générer une vente, permettant ainsi une allocation plus stratégique du budget marketing.

Gestion de la chaîne d'approvisionnement : Une entreprise peut appliquer la loi géométrique pour évaluer le risque de retard dans la livraison de composants critiques de la part de fournisseurs. Si chaque jour a une probabilité fixe de voir arriver la livraison, la loi peut aider à estimer le délai moyen d'attente, facilitant la planification de la production et la gestion des stocks.

Recrutement : La loi géométrique peut aider à estimer le nombre moyen d'entretiens nécessaires avant de trouver le candidat idéal, permettant ainsi à l'entreprise de planifier le processus de recrutement de manière plus efficace.

Finance : Dans le domaine de la finance, la loi géométrique peut modéliser le nombre de jours nécessaires avant qu'un certain mouvement de prix se produise sur les marchés financiers, supposant une probabilité constante de mouvement dans une direction donnée chaque jour.

7. La loi de Poisson

A. Le processus de Poisson

Le processus de Poisson est utilisé pour modéliser des événements rares qui se produisent de manière aléatoire et indépendante dans le temps ou l'espace.

Exemple

- Supposons que vous teniez un stand de vente de glaces. Vous observez que les clients arrivent à votre stand de manière aléatoire au cours de la journée, et en moyenne, vous avez 5 clients par heure.
- Le processus de Poisson modélise cette situation en supposant que les clients arrivent indépendamment les uns des autres, et que le taux d'arrivée moyen reste constant à 5 clients par heure.
- La loi de Poisson vous permet de calculer la probabilité d'observer un certain nombre de clients pendant un intervalle de temps donné. Par exemple, vous pouvez utiliser la loi de Poisson pour calculer la probabilité d'avoir exactement 3 clients pendant une heure ou encore la probabilité d'avoir exactement 10 clients pendant 3 heures, etc.

7. La loi de Poisson

B. la loi de probabilité de Poisson

Une variable aléatoire X discrète suit une loi de Poisson, de paramètre λ si sa loi de probabilité est modélisée par la fonction suivante :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$P(X = k)$: est la probabilité qu'il y ait k événements dans l'intervalle donné

e : est la base du logarithme naturel (environ 2.71828)

λ : est le taux moyen d'événements par unité de temps ou d'espace

K : est le nombre d'événements que vous cherchez à modéliser

7. La loi de Poisson

C. Les caractéristiques d'une variable de Poisson

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre λ . On a :

Si $X \rightarrow P(\lambda)$, alors

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Exemple

Supposons qu'un centre d'appels reçoive en moyenne 5 appels téléphoniques par heure, selon une distribution de Poisson. Quelle est la probabilité qu'ils reçoivent exactement 3 appels téléphoniques au cours de la prochaine heure ?

7. La loi de Poisson

Résolution

- Pour résoudre cet exercice, nous utilisons la formule de la distribution de Poisson : $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
- λ est le taux moyen d'événements par heure (dans ce cas, le nombre moyen d'appels téléphoniques par heure)
- k est le nombre d'événements que nous recherchons (dans ce cas, 3 appels téléphoniques).
- Nous avons donc : $\lambda=5$ et $k=3$

Substituant ces valeurs dans la formule, nous obtenons :

$$P(X=3) = \frac{e^{-5} 5^3}{3!}$$

$$P(X=3) = 0,14$$

Donc, la probabilité qu'ils reçoivent exactement 3 appels téléphoniques au cours de la prochaine heure est d'environ 0,1404, soit environ 14,04 %.

7. La loi de Poisson

Exercice

Un établissement commercial a créé un département de vente par téléphone. L'établissement a commandé une étude statistique des appels téléphoniques reçus de façon à mettre en place des mesures propres à réduire l'attente de ses clients au téléphone. Cette étude a montré que les appels obéissaient à un processus de Poisson et que le nombre moyen d'appels observés entre 18 et 20 heures, période de pointe homogène, était de 120 par heure. Les questions qui suivent se rapportent toutes à la plage 18-20heures.

1. Quelle est la probabilité qu'il se produise 8 appels durant un intervalle de temps de 5 minutes ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait 3 appels ou plus enregistrés pendant une période de 2 minutes.

7. La loi de Poisson

Corrigé

Soit Z = nombre d'appels observés sur une période de 1 heure. $Z \rightarrow P(\lambda = 120)$ puisque le nombre d'appels (succès) enregistrés est en moyenne égal à 120 par heure, et que les appels obéissent à un processus de Poisson.

120 appels par heure est l'intensité du processus.

1. Soit X = nombre d'appels observés sur une période de 5 minutes.

120 appels en moyenne par heure correspondent à $(120 \times 5)/60 = 10$ appels en moyenne par intervalle de 5 minutes. Ainsi :

$$X \rightarrow P(\lambda = 10)$$

La probabilité qu'il se produise 8 appels durant cet intervalle de temps de 5 minutes est donc donné par la fonction de distribution d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$ et $k=8$: $p(X = 8) = \frac{e^{-10} 10^8}{8!} = 0,1126$

Il y a donc 11,26 % de chances qu'il arrive 8 appels au standard pendant un intervalle de temps de 5 minutes.

7. La loi de Poisson

Corrigé

Soit Z = nombre d'appels observés sur une période de 1 heure. $Z \rightarrow P(\lambda = 120)$ puisque le nombre d'appels (succès) enregistrés est en moyenne égal à 120 par heure, et que les appels obéissent à un processus de Poisson.

120 appels par heure est l'intensité du processus.

2. Soit Y = nombre d'appels observés sur une période de 2 minutes.

$Y \rightarrow P(\lambda = 120 \times 2/60 = 4)$

120 appels en moyenne par heure correspondent à 4 appels en moyenne par intervalle de 2 minutes. Ainsi : $X \rightarrow P(\lambda = 4)$

La probabilité demandée est égale à la probabilité que la variable Y soit supérieure à 3.

- $$p(Y \geq 3) = 1 - p(Y < 3)$$
$$= 1 - (p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2))$$

Il suffit maintenant de calculer chacune des probabilités à l'aide de la fonction de distribution de la loi de Poisson de paramètre

$\lambda = 4$

7. La loi de Poisson

Corrigé

$$p(X = 0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = 0,0183$$

$$p(X = 1) = \frac{e^{-4} 4^1}{1!} = 0,0733$$

$$p(X = 2) = \frac{e^{-4} 4^2}{2!} = 0,1465$$

$$p(Y \geq 3) = 1 - (0,0183 + 0,0733 + 0,1465) = 0,7619$$

Il y a donc presque 76 % de chances qu'il arrive 3 appels ou plus au standard lors d'un intervalle de temps de 2 minutes, si le nombre moyen d'appels enregistrés par heure est égal à 120.

7. La loi de Poisson

D. Exemples concrets d'utilisation de la loi de Poisson en management

La loi de Poisson permet de modéliser et analyser des événements qui se produisent à un taux moyen constant dans un intervalle donné de temps, de distance, de surface ou de volume. Voici des exemples concrets de son application dans différents aspects du management :

Planification de la maintenance des équipements : Dans le contexte de la maintenance d'équipements ou de machines, la loi de Poisson peut aider à modéliser la survenue des pannes pour des équipements ayant un taux de défaillance connu λ sur une période donnée. Cette information permet aux managers de planifier de manière proactive les interventions de maintenance, les inspections, et d'optimiser les stocks de pièces de rechange.

Gestion des files d'attente : Les entreprises peuvent utiliser la loi de Poisson pour modéliser par exemple l'arrivée des clients à une agence bancaire, permettant aux managers d'ajuster les effectifs pour minimiser le temps d'attente sans allouer plus de ressources que nécessaire. Cette approche peut s'appliquer à divers services, de la caisse aux consultations de conseillers financiers.

Optimisation des opérations de livraison : Les entreprises de logistique et de livraison peuvent utiliser la loi de Poisson pour modéliser le nombre de commandes à livrer dans différents intervalles de temps, ce qui aide à planifier les itinéraires de livraison, à assigner les ressources de transport et à estimer les délais de livraison de manière plus précise.

Gestion des stocks : Pour les détaillants, la loi de Poisson peut aider à prédire le nombre de clients achetant un produit spécifique sur une période donnée, permettant une gestion plus efficace des stocks. En anticipant la demande, les managers peuvent réduire les coûts liés au surstockage ou au risque de rupture de stock.