

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion
2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : Indépendances et probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 7 : Loi de probabilité

Chapitre 3. Indépendances et probabilités conditionnelles

- 1. Définitions et propriétés**
- 2. Les probabilités totales**
- 3. Arbre pondéré**
- 4. Formule de Bayes**
- 5. Probabilités et indépendance**

1. Définitions et propriétés

A. Définition

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ et est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

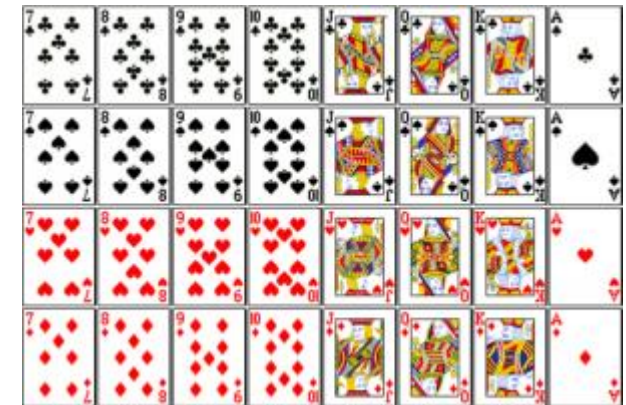
Exemple 1 :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement "Le résultat est un pique".

Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

Calculer la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.



1. Définitions et propriétés

Résolution 1:

$A \cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi

1. Définitions et propriétés

Exemple 2:

Un sac contient 100 boules, dont 40 boules vertes et 60 boules bleues, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"

Sur 30 boules vertes, il est marqué Gagné.

Sur 18 boules bleues, il est marqué Gagné.

On tire au hasard une boule dans le sac.

Calculer la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est verte.

1. Définitions et propriétés

Résolution 2:

- Soit V l'événement "On tire une boule verte".
- Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"
- Donc $V \cap G$ est l'événement "On tire une boule verte marquée Gagné"

- Alors : $P(V) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4$ et $P(V \cap G) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$.
- Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est verte est : $P_v(G) = \frac{P(V \cap G)}{P(V)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$

- On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule verte, on a 30 chances sur 40 qu'il soit marqué Gagné.

1. Définitions et propriétés

B. Propriétés

La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilités simples.

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

2. Les probabilités totales

A. Système complet d'évènements

On dit que $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un système complet d'évènements si les deux conditions suivantes sont vérifiées : $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$

Autrement dit : un système complet est une famille d'évènements qui sont **deux à deux incompatibles** et dont la **réunion** est **l'univers**. En d'autres termes, il s'agit d'une partition de l'univers.

Exemples :

Considérons un lancer de dé. L'univers des issues possibles est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les événements P : « obtenir un chiffre pair » et S : « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles et leur réunion est l'univers. P et S forment donc un système complet.

Un autre système complet est formé par les événements A , B et C , définis de la façon suivante :

- $A = \{1, 2, 5\}$;
- $B = \{4\}$;
- $C = \{3, 6\}$.

2. Les probabilités totales

B. Formule des probabilités totales

Si $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\}$ est un système complet d'événements, quel que soit l'événement B , alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$$

Exemple

Trois machines M_1, M_2, M_3 produisent respectivement 1000, 500 et 500 tiges de métal. Ces mêmes machines sont imparfaites et produisent respectivement 5%, 4% et 2% de pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une pièce choisie au hasard parmi les 2000 soit défectueuse ?

Résolution

Les probabilités que la pièce vienne de la machine M_i sont respectivement données par :

$$P(M_1) = 1000/2000 = \frac{1}{2}$$

$$P(M_2) = 500/2000 = \frac{1}{4}$$

$$P(M_3) = 500/2000 = \frac{1}{4}$$

$$P_{M_1}(D) = 0,05$$

$$P_{M_2}(D) = 0,04$$

$$P_{M_3}(D) = 0,02$$

On peut donc appliquer la formule de la probabilité totale :

$$P(D) = P_{M_1}(D) \cdot P(M_1) + P_{M_2}(D) \cdot P(M_2) + P_{M_3}(D) \cdot P(M_3) = 0,05 \times \frac{1}{2} + 0,04 \times \frac{1}{4} + 0,02 \times \frac{1}{4} = 0,04$$

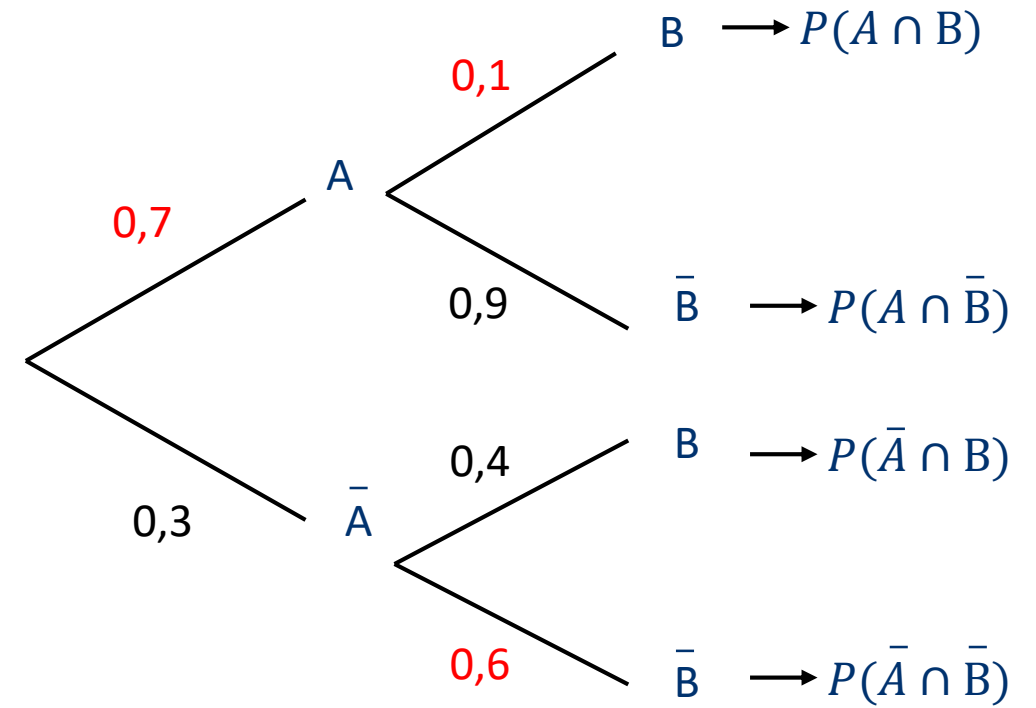
3. Arbre pondéré

Exemple : on donne l'arbre pondéré.

1- Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.

2- A l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$

- $P(\bar{A}) = 0,3$
- $P_A(\bar{B}) = 0,9$
- $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,7$
- $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6$
- $P(A \cap \bar{B}) = 0,9 \times 0,7 = 0,63$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$



3. Arbre pondéré

Exemple : on reprend l'exemple précédent

Un sac contient 100 boules, dont 40 boules vertes et 60 boules bleues, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"

Sur 30 boules vertes, il est marqué Gagné.

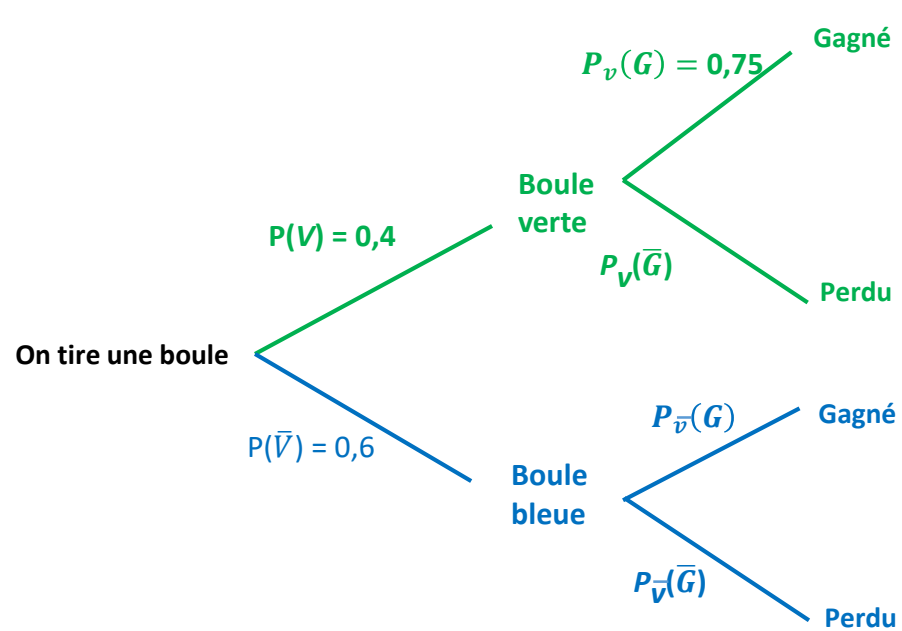
Sur 18 boules bleues, il est marqué Gagné.

On tire au hasard une boule dans le sac.

Calculer la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est verte.

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :

3. Arbre pondéré



$V \cap G$ Boule verte marqué Gagné
 $P(V \cap G) = P(V) \times P_v(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

$V \cap \bar{G}$ (Boule verte marqué Perdu)

$\bar{V} \cap G$ (Boule bleue marqué Gagné)

$\bar{V} \cap \bar{G}$ (Boule bleue marqué Perdu)

3. Arbre pondéré

Propriété 1 : la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

Exemple :

- A partir du nœud "On tire une boule", on a : $P(V) + P(\bar{V}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du nœud "Boule verte", on a : $P_v(\bar{G}) = 1 - P_v(G) = 1 - 0,75 = 0,25$

Propriété 2 : la probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

Exemple :

- On considère la feuille $V \cap G$
- On a : $P(V \cap G) = P(V) \times P_v(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

3. Arbre pondéré

Propriété 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

Exemple :

L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux feuilles $V \cap G$ et $\bar{V} \cap G$.

- On a :
- $P(V \cap G) = 0,3$ et
- $P(\bar{V} \cap G) = \frac{9}{50} = 0,18$ (Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
- Donc $P(G) = P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$.

3. Arbre pondéré

Exemple

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note les événements :

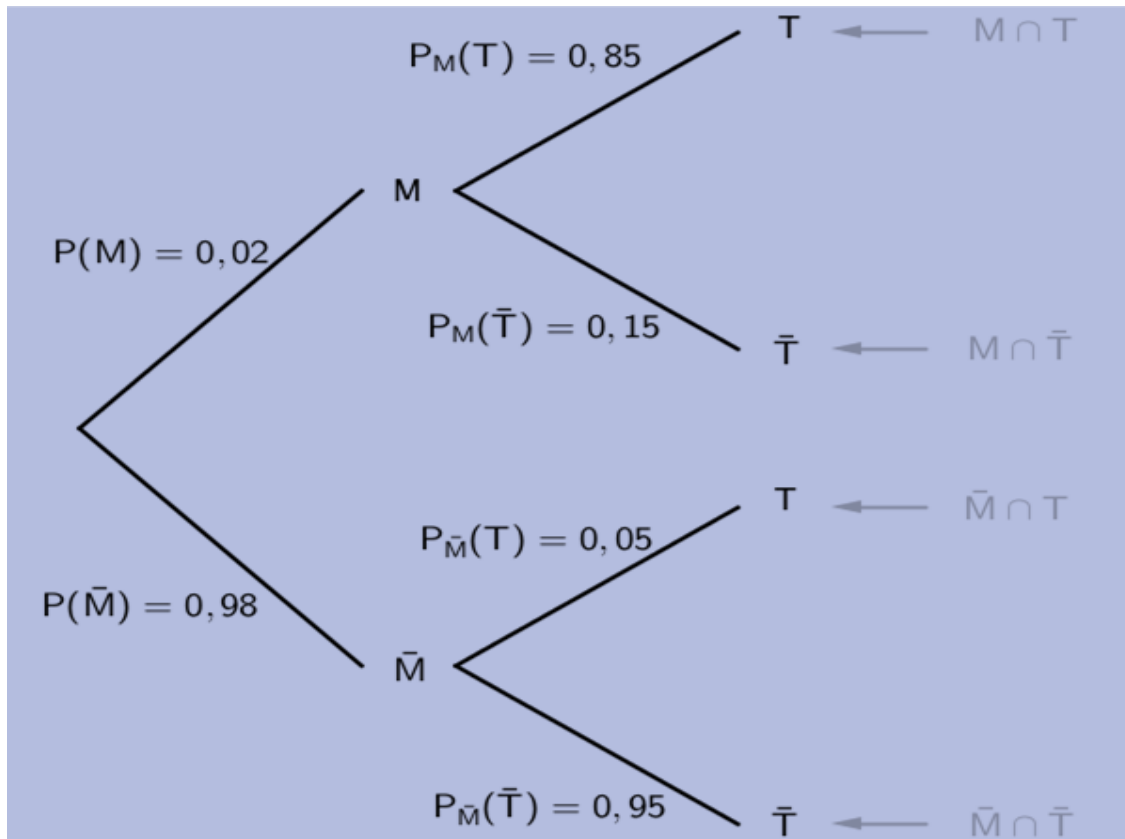
M : « Être porteur de la maladie »

T : « Avoir un test positif »

- 1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
- 2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

3. Arbre pondéré

Exemple



- 1) La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles $M \cap T$ et $\bar{M} \cap T$.

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \text{ (Formule des probabilités totales)} \\ = 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

$$2) P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%.

4. La formule de Bayes

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'évènements et soit B un évènement de probabilité non nulle alors :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P_{A_i}(B)}$$

L'évènement B a eu lieu, quelle est la probabilité que A_i en soit la cause ?

Ce théorème combine la formule de la probabilité conditionnelle et celle des probabilités totales

4. La formule de Bayes

Exemple

Une maladie touche 5% de la population. Un test de dépistage existe mais n'est pas complètement fiable. Ce test déclare l'individu malade dans 97% des cas s'il est effectivement malade et le déclare non malade dans 85% des cas si l'individu n'est pas malade. Un individu passe le test et il le déclare malade. Quelle est la probabilité pour que l'individu soit vraiment malade ?

Résolution

Soit M = « être malade » ; D = « être déclaré malade »

On souhaite connaître $P_D(M)$.

$$P(M) = 0,05$$

$$P_M(D) = 0,97$$

$$P_{\bar{M}}(\bar{D}) = 0,85$$

$$P(\bar{M}) = 0,95$$

$$P_M(\bar{D}) = 0,03$$

$$P_{\bar{M}}(D) = 0,15$$

$$\frac{P_M(D) \cdot P(M)}{P_M(D) \cdot P(M) + P_{\bar{M}}(D) \cdot P(\bar{M})} = \frac{0,97 \times 0,05}{0,97 \times 0,05 + 0,15 \times 0,95} = 0,254$$

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \times P_{A_i}(B)}$$

5. Probabilités et indépendance

A. Indépendance de deux événements

On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

- A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.
- Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

5. Probabilités et indépendance

A. Indépendance de deux événements

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement "On tire un roi". Soit T l'événement "On tire un trèfle". A et bon sont-ils indépendants ?

$R \cap T$ est l'événement "On tire le roi de trèfle".

$$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad P(R \cap T) = \frac{1}{32}$$

$$\text{Donc } P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$$

Les événements R et T sont donc indépendants.

Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

5. Probabilités et indépendance

A. Indépendance de deux événements

On reprend l'expérience précédente en ajoutant trois jokers au jeu de cartes.

Ainsi :

$$P(R) = \frac{4}{35}$$

$$P(T) = \frac{8}{35}$$

$$P(R \cap T) = \frac{1}{35}$$

$$\text{Donc } P(R) \times P(T) = \frac{4}{35} \times \frac{8}{35} = \frac{32}{1225} \neq P(R \cap T)$$

Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

5. Probabilités et indépendance

A. Indépendance de deux événements

Exemple

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,03 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,1. On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit M l'événement "L'individu a la maladie m ".

Soit N l'événement "L'individu a la maladie n ".

On suppose que les événements M et N sont indépendants. Calculer la probabilité de l'événement E "L'individu a au moins une des deux maladies".

Corrigé

$$P(E) = P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

$$= P(M) + P(N) - P(M) \times P(N), \text{ car les événements } M \text{ et } N \text{ sont indépendants.}$$

$$= 0,03 + 0,1 - 0,03 \times 0,1 = 0,127$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 0,127.

5. Probabilités et indépendance

B. Indépendance d'une famille d'évènements

Définition :

Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :

- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Exemples

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 4 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 7 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

5. Probabilités et indépendance

B. Indépendance d'une famille d'évènements

Propriétés : On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

- Si on répète l'expérience deux fois de suite :
- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

5. Probabilités et indépendance

B. Indépendance d'une famille d'évènements

Exemple

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules oranges et 2 boules noires.

On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2) Déterminer la probabilité :

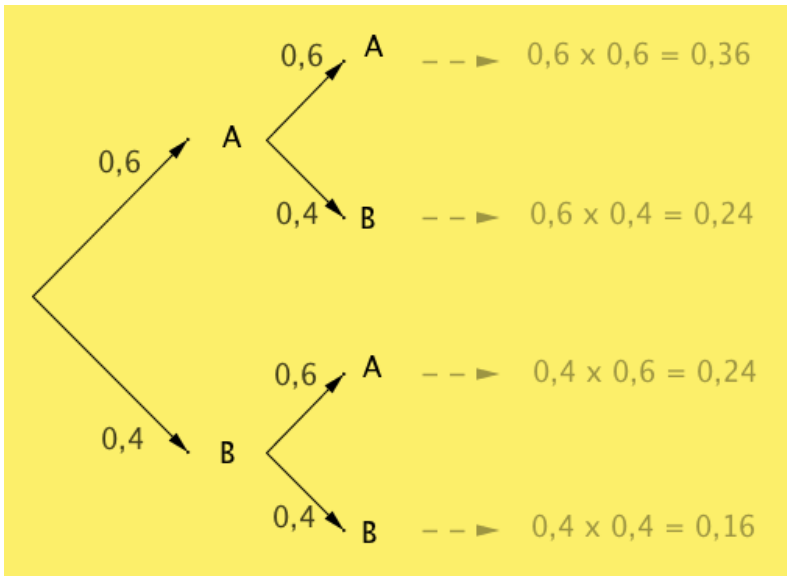
- a) d'obtenir deux boules oranges
- b) une boule orange et une boule noire
- c) au moins une boule orange

5. Probabilités et indépendance

B. Indépendance d'une famille d'évènements

Exemple

- 1) On note A l'issue "On tire une boule orange" et B l'issue "On tire une boule noire".
- $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$.



- Obtenir deux boules oranges correspond à l'issue (A ; A) :
 $P_1 = 0,36$ (d'après l'arbre).
- Obtenir une boule orange et une boule noire correspond aux issues (A ; B) et (B ; A) :
 $P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.
- Obtenir au moins une boule orange correspond aux issues (A ; B), (A ; A) et (B ; A) :
 $P_2 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$.