UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
ÉCOLE DE MANAGEMENT DE LA SORBONNE

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion

2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 4. Introduction aux variables aléatoires réelles

1. Variable aléatoire et loi de probabilité
2. Espérance, variance, écart-type
3. Somme de variables aléatoires
4. Combinaisons linéaires de variables aléatoires

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

A. Variable aléatoire

Rappel

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle **l'univers** des possibles.

- On considère l'événement A : "On obtient un résultat impair."

On a donc : $A = \{1 ; 3 ; 5\}$.

- On considère l'événement élémentaire B : "On obtient un 4".

On a donc : $B = \{4\}$.

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle **une issue**.
- L'**univers des possibles** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

A. Variable aléatoire

Exemple

Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

Si le résultat est impair, on gagne 1€.

Si le résultat est 2, on gagne 2€.

Si le résultat est 4 ou 6, on perd 5€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 1, 2 ou –5.

On a donc : $X(1) = 1$ $X(2) = 2$ $X(3) = 1$

$X(4) = -5$ $X(5) = 1$ $X(6) = -5$

Définition : Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

B. Loi de probabilité

Exemple

- On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
- Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.
- La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 1 est égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- On note : $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.
- De même : $P(X = 2) = \frac{1}{6}$
- Enfin : $P(X = -5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- On peut résumer les résultats dans ce tableau
- Ce tableau résume donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	-5	2	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

B. Loi de probabilité

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

- Une variable aléatoire X est une fonction qui, à chacun des événements fait correspondre un nombre réel
- Avant l'expérience, on a une variable aléatoire qui peut prendre différentes valeurs possibles ; après l'expérience, l'événement est réalisé et on a une valeur de cette variable

Notations

X : la lettre majuscule désigne la variable aléatoire

x : la lettre minuscule désigne la valeur prise par la variable aléatoire X

« X = x » signifie « la variable aléatoire X prend la valeur x »

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

B. Loi de probabilité

<u>Remarques</u>

- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

<u>Exemple</u>

- Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

B. Loi de probabilité

Exemple d’application

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

Si on tire un cœur, on gagne 3 €.

Si on tire un roi, on gagne 6 €.

Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

Déterminer la loi de probabilité de X.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

B. Loi de probabilité

Résolution

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 3, 6, –1 mais aussi 9

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 6(roi) + 3(cœur) = 9 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 3 $P(X = 3) = \frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 6 $P(X = 6) = \frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 9 $P(X = 9) = \frac{1}{32}$.
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = –1 $P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est présentée dans ce tableau :

x_i	–1	3	6	9
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

2. Espérance, variance, écart-type

A- Définitions

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i\, xi$

La **variance** de la loi de probabilité de X est : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - \mathrm{E}(\mathrm{X}))2$

L'**écart-type** de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

2. Espérance, variance, écart-type

A- Définitions

Exemple d'application

- Dans l'exemple précédent, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de X et interpréter les résultats pour l'espérance et l'écart-type.

x_i	-1	3	6	9
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- E(X) = $\frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 3 + \frac{3}{32} \times 6 + \frac{1}{32} \times 9 = \frac{27}{32}$
- V(X) = $\frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{27}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(3 - \frac{27}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(6 - \frac{27}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(9 - \frac{27}{32}\right)^2 \approx 7{,}819$
- $\sigma(X) \approx \sqrt{7{,}819} \approx 2{,}80$
- L'espérance est égale à $\frac{27}{32} \approx 0{,}84$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois à ce jeu, on peut espérer en moyenne gagner environ 0,84 €.
- L'écart-type est environ égal à 2,80 signifie qu'avec une espérance proche de 0,84 le risque de perdre de l'argent est important.

2. Espérance, variance, écart-type

B- Propriétés

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω.

Soit a et b deux nombres réels. On a :

***E*(aX+b) = a*E*(X)+b** **$V(aX+b) = a^2V(X)$**

<u>Démonstration</u>

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b) \\
&= a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b \times 1 \\
&= aE(X) + b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i + b - (aE(X) + b)\big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i - aE(X)\big)^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2 \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}
$$

2. Espérance, variance, écart-type

B- Propriétés

<u>Exemple</u>

Une entreprise qui fabrique des bouchons. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard un bouchon d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire *X* qui, à un bouchon choisi au hasard, associe son diamètre.

La loi de probabilité de *X* est résumée dans le tableau ci-dessous.

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de *X*.

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

2. Espérance, variance, écart-type

B- Propriétés

Résolution

- Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
- La loi de probabilité de Y est alors :

x_i	–2	–1	0	1	2
$P(Y = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :

$E(Y) = -2\text{x}0,2 + (-1)\text{x}0,1 + 1\text{x}0,4 + 2\text{x}0,1 = 0,1$

$V(Y) = 0,2\text{x}(-2 - 0,1)^2 + 0,1\text{x}(-1 - 0,1)^2 + 0,2\text{x}(0 - 0,1)^2 + 0,4\text{x}(1 - 0,1)^2 + 0,1\text{x}(2 - 0,1)^2 = 1,69$

2. Espérance, variance, écart-type

B- Propriétés

<u>Résolution</u>

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :

$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000\,E(X) - 1300$

Donc : $E(X) = \frac{E(Y)+1300}{1000} = \frac{0,1+1300}{1000} = 1,3001$

$V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2\,V(X)$

Donc : $V(X) = \frac{V(Y)}{1000^2} = \frac{1,69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1,69}{1000^2}} = \frac{1,3}{1000} = 0,0013$

Conclusion : $E(X) = 1,3001$ cm et $\sigma(X) = 0,0013$ cm.

3. Somme de variables aléatoires

B- Propriétés

Exemple

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs –2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.

Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.

Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.

En effet, on a par exemple $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$.

3. Somme de variables aléatoires

B- Propriétés

Exemple

Afin de calculer la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$:

On pourra calculer : $P(X + Y = 5) = P\big((X = 1) \cap (Y = 4)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$

On cherche toutes les sommes $X + Y$ égales 5.

Si de plus, les évènements X et Y sont indépendants, alors on a : $P(X + Y = 5) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 3)$

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires.

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

- $P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$
- Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :
- $P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)\, P(Y = j)$

Remarque :

Si par exemple, i et j sont des entiers naturels et $k = 2$ alors :

$$P(X + Y = 2) = \sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j))$$
$$= P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 0))$$

3. Somme de variables aléatoires

B- Propriétés

Application

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 5 €, si on tombe sur « face », on gagne 10 €.
- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 5 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 10 €. Si on tombe sur le « 1 », on perd 25 €.

La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2e partie.

On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

3. Somme de variables aléatoires

B- Propriétés

<u>Résolution</u>

Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles. Ainsi, on a :

- $P(S=-20)=P(X=5)P(Y=-25)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ (en effet, les variables X et Y sont indépendantes)
- $(S=-15)=P(X=10)P(Y=-25)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
- $(S=10)=P(X=5)P(Y=5)\ \ =\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
- $P(S=15)=P(X=5)P(Y=10)+P(X=10)P(Y=5)\ =\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$
- $P(S=20)=P(X=10)P(Y=10)\ \ =\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Y \ X	5	10
-25	-20	-15
5	10	15
10	15	20

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-20	-15	10	15	20
$P(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

4. Combinaisons linéaires de variables aléatoires

A. Linéarité de l'espérance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

B. Variance

- $V(aX + b) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$